第三章 微分

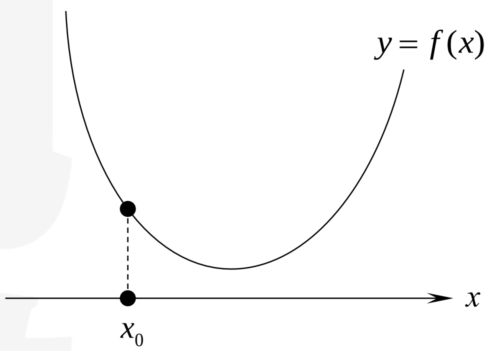
- 始於斜率，終於斜率

重點一 導數與微分的概念

1. 給定一個函數 $y=f(x)$，我們用 ______ 表示此函數在 $x=x_0$ 的切線斜率。

$f'(x_0)=$

$=$



2. $f'(x_0)$ 稱爲 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 ______

3. $f'(x)$ 稱爲 $f(x)$ 的 ______

4. 將 $f(x)$ 變成 $f'(x)$ 的動作叫做 ______

5. ______：將 $f(x)$ 對 x 微分，所得爲 ______

6. ______：將 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 對 x 微分，所得爲 ______

7. 若 $f'(x_0)$ 存在，則我們說 $f(x)$ 在 $x=x_0$ ______

8. 函數可微分的定義：

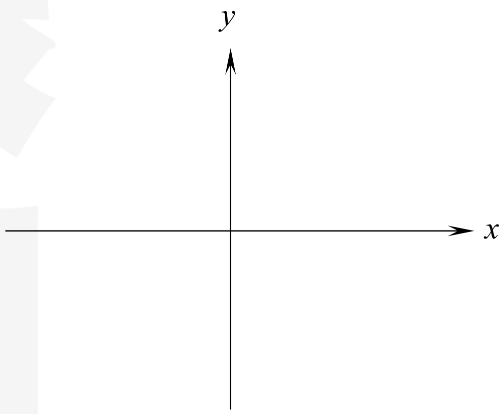
$f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微 $\Leftrightarrow$

9. $f(x)$ 在 (a,b) 可微 $\Leftrightarrow$ ______

例題 1.

Let $f(x)=c$, where $c\in\mathbb{R}$. Show that $f'(x)=0$.

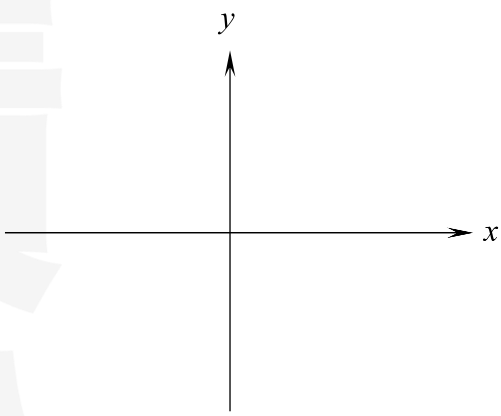
解



例題 2.

Let $f(x)=x$. Show that $f'(x)=1$.

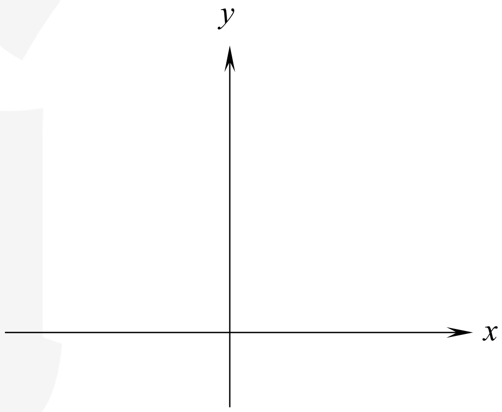
解



例題 3.

Let $f(x)=x^2$. Show that $f'(x)=2x$.

解



例題 4.

Let $f(x)=x^n$, where $n\in\mathbb{N}$. Show that $f'(x)=nx^{n-1}$.

解

例題 5. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=a^x$. Show that $f'(x)=a^x\ln a$.

解

例題 6. (精選範例 1-1)

Let $f(x)=\log_a x$. Show that $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

解

例題 7. (精選範例 1-2)
Show that $(\sin x)' = \cos x$.
解

例題 8. (精選範例 1-2)
Show that $(\cos x)' = -\sin x$.
解

例題 9. (精選範例 1-3)

Let $f(x)$ be differentiable at $x = x_0$. Show that $f(x)$ is continuous at $x = x_0$.

解

例題 10. (精選範例 1-3)

Let $f(x)$ be continuous at $x = x_0$. Must $f(x)$ be differentiable at $x = x_0$?

解

例題 11. (精選範例 1-4)

If $f'(1)=2$, find the following limits.

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+6h)-f(1)}{h}$ (2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+4h)-f(1-7h)}{h}$

解

例題 12. (精選範例 1-5)

If $f(1)=0$ and $f'(1)=3$, find $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)}{6h}$

解

重點一（補充）自然底數、自然指數與自然對數

1. 存錢問題：

設本金 A，年利率 r，複利計息，若分 n 期則期利率為 $\dfrac{r}{n}$

(1) 若分一期，期滿可得：$A(1+r)$

若分二期，期滿可得：$A(1+\dfrac{r}{2})^2$

若分三期，期滿可得：$A(1+\dfrac{r}{3})^3$

依此類推，若分 n 期，期滿可得：$A(1+\dfrac{r}{n})^n$

(2) 問題：分幾期最划算？

$\boxed{\text{說明}}$

由算幾不等式知：$\dfrac{\overbrace{(1+\frac{r}{n})+(1+\frac{r}{n})+\cdots+(1+\frac{r}{n})}^{n\text{ 個}}+1}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{(1+\frac{r}{n})^n\cdot 1}$

$$\Rightarrow\ (1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{n+1}}\leq\frac{n(1+\frac{r}{n})+1}{n+1}=\frac{n+r+1}{n+1}=1+\frac{r}{n+1}$$

$$\Rightarrow\ (1+\frac{r}{n})^n\leq(1+\frac{r}{n+1})^{n+1}$$

$$\Rightarrow\ A(1+\frac{r}{n})^n\leq A(1+\frac{r}{n+1})^{n+1}$$

故分期數越多越划算！

(3) 問題：若銀行真的讓你分無限期，一年後你會不會獲得無限多錢？

$\boxed{\text{說明}}$

$$\begin{aligned}(1+\frac{r}{n})^n&=C_0^n+C_1^n\cdot\frac{r}{n}+C_2^n\cdot(\frac{r}{n})^2+C_3^n\cdot(\frac{r}{n})^3+\cdots+C_n^n\cdot(\frac{r}{n})^n\\&=1+n\cdot\frac{r}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot(\frac{r^2}{n^2})+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot(\frac{r^3}{n^3})+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{r^n}{n^n}\\&=1+r+\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^2}{2!}+\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^3}{3!}+\cdots+\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\text{小於 }1}\cdot\frac{r^n}{n!}\\&<1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}\\&<1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}+\cdots\ \text{(增項增為無窮級數)}\end{aligned}$$

設 $a_k = \dfrac{r^k}{k!}$

則 $1 + r + \dfrac{r^2}{2!} + \dfrac{r^3}{3!} + \cdots + \dfrac{r^n}{n!} + \cdots = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

因 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\dfrac{r^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{r^k}{k!}} = \dfrac{r}{k+1}$

取 $K \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $k \ge K$ 均有 $\dfrac{r}{k+1} < \dfrac{1}{2}$

則當 $k \ge K$ 以後，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < \dfrac{1}{2}$

故 $a_{K+1} < \dfrac{1}{2} a_K$ ，$a_{K+2} < \dfrac{1}{2} a_{K+1} < \dfrac{1}{2^2} a_K$ ，… ，$a_{K+m} < \dfrac{1}{2^m} a_K$

若令 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = M \quad (0 < M < \infty)$

則
$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots &= \underbrace{a_0 + \cdots + a_{K-1}}_{M} + a_K + a_{K+1} + a_{K+2} + \cdots \\
&< M + a_K + \frac{1}{2} a_K + \frac{1}{2^2} a_K + \cdots \\
&= M + a_K (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots) \\
&= M + a_K \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= M + 2a_K \\
&= M + 2 \cdot \frac{r^K}{K!} < \infty
\end{aligned}
$$

既然 n 是任意的，$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{r}{n})^n < M + 2 \cdot \dfrac{r^K}{K!} < \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A(1 + \dfrac{r}{n})^n < AM + \dfrac{2Ar^K}{K!} < \infty$

故就算分無限期，一年以後還是不會無限多錢

(4) 既然 $A(1 + \dfrac{r}{n})^n$ 隨著 n 增加而增加

且對任意正整數 n 均有 $A(1 + \dfrac{r}{n})^n < AM + \dfrac{2Ar^K}{K!} < \infty$

所以 $A(1 + \dfrac{r}{n})^n$ 當 $n \to \infty$ 時的極限必存在

即 $\lim\limits_{n\to\infty} A(1 + \dfrac{r}{n})^n \in \mathbb{R}$

(5) 特別來說，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \in \mathbb{R}$

我們令此特別的極限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

(6) e 稱為自然底數，其值約為 2.718281828…

2. 自然指數與自然對數：

(1) 自然指數函數：$f(x)=e^x$；若將其微分得 $f'(x)=e^x$

(2) 自然對數函數：$f(x)=\log_e x=\ln x$；若將其微分得 $f'(x)=\frac{1}{x}$