壹、微分方程篇

建立數學模型來找出世界運作的規則

主題一　微分方程的產生

1. **說例一：(拋體)**

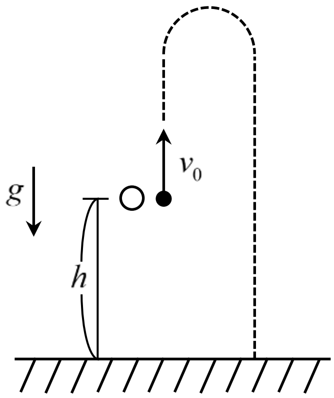
設重力加速度為 g，今將一物體距離地面高度 h 向上拋射，初速為 v_0，試建立此拋體對時間的位移函數數學模型。

〈說明〉

1° 設 $y=y(t)$ 為此物體之位移函數 (向上為正)

則 $\dfrac{dy}{dt}$ 為速度，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ 為加速度

$\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2}=$



2° $\because$ 此物體的初始位置為 h 且初速為 v_0

$\therefore$ 可列式：

3° 故此拋體對時間的位移函數模型為 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$ ■

2. **說例二：(細菌增長)**

假設某細菌在培養皿的初始數量為 n_0，若此細菌數量對時間的增長速率與細菌的現有數量呈正比，試建立此細菌對時間的數量函數數學模型。

〈說明〉

1° 設 $n=n(t)$ 為此細菌之數量函數

$\Rightarrow \dfrac{dn}{dt}$ 為此細菌數量對時間的增長速率

2° 依題意可列式：$\dfrac{dn}{dt}=$

又此細菌的初始數量為 n_0

故此細菌對時間的數量函數模型為 $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right.$ ■

3. 透過觀察自然界的某特定事物或現象，並建立其數學模型，若其數學模型有微分結構，則該方程式即稱為微分方程。若能解出該數學模型的解，那麼就等於得到了該自然現象的規律，從而能預測該自然現象的未來，或者了解其全貌。

4. 本篇將介紹各種型式的微分方程及其解法。

◉ 再長的路，慢慢走一步步也能走完；再短的路，不邁開雙腳也無法到達。

主題二　分離變數法

1. 遇到型如　　　　　　　　　　　　之微分方程，均可使用**分離變數法**。
2. **分離變數法步驟：**

   1°

   2°

例題 1

Solve $y'=2x+5$.

〈解〉

◎　兩邊積分時，可以將兩常數合併為一個新的常數。

類題 1

Solve $y'=\dfrac{2x+5}{y^2}$.

〈答〉 $\dfrac{1}{3}y^3=x^2+5x+C$

例題 2

Solve $ydx+xdy=0$.

〈解〉

◎　$-\ln|x|=\ln|y|+C$ 可以如此整理:

原式 $\Rightarrow e^{-\ln|x|}=e^{\ln|y|+C}\Rightarrow \dfrac{1}{|x|}=e^{C}|y|\Rightarrow |xy|=C$ (最後一步把 e^{-C} 記為一個新的常數)

類題 2

Solve $x^3dy+(y+1)dx=0$.

〈答〉 $|y+1|=Ce^{\frac{1}{2x^2}}$

例題 3

Solve $y'-y+7=0$.

〈解〉

類題 3

Solve $y'+5y-1=0$.

〈答〉 $|1-5y|=Ce^{-5x}$

例題 4

Solve $e^y(1-x^2)dy-\dfrac{x}{2}dx=0$.

〈解〉

類題 4

Solve $(1+\cos x)dy-e^y\sin^3 xdx=0$.

〈答〉 $y=-\ln\left|\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\cos x+C\right|$

例題 5

Solve $x^2ydy-dx=ydx+x^2dy$.

〈解〉

類題 5

Solve $\sin x\cos^2 y dy + x dx = \sin x dy + (x+\cos x)dx$.

〈答〉 $-\dfrac{y}{2}+\dfrac{\sin 2y}{4}=\ln\left|\sin x\right|+C$

◉ 不要等待機會，而是要創造機會。

主題三　可化成變數可分離型

1. 有些微分方程乍看之下並非變數可分離型，但只要經過適當的**打包**，就可以化成變數可分離型。

2. **常見的可化成變數可分離型的各型：**

(1) $y' = f(\frac{y}{x})$ 型：(齊次)

$\boxed{\text{解法}}$ 令　　　　將 y 代換掉，解 u 再代回

(2) $y' = f(ax+by)$ 型：

$\boxed{\text{解法}}$ 令　　　　　　將 y 代換掉，解 u 再代回

(3) $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ 型：

$\boxed{\text{解法}}$

① 若 $(a_1,b_1)//(a_2,b_2)$，則為　　　　　　　　型

② 若 $(a_1,b_1)\not\parallel(a_2,b_2)$，則：

1° 解 $\left\{ \right.$　　　　　　得交點 (h,k)

2° 令 $\left\{ \right.$　　　　代回原式，則原式化為齊次型

3° 用齊次型解法解之

例題 1

Solve $y' = \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$.

〈解〉

◎ 令 u 的過程中，我們通常把 y 換掉，即把原本是 x 和 y 的式子變成 x 和 u 的式子。

類題 1

Solve $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

〈答〉 $\tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) = \ln|x| + C$

例題 2

Solve $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

〈解〉

◎ 相較於從 $y = ux$ 推得 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，實作上更常使用 $dy = udx + xdu$ 這個推論。要獲得 $dy = udx + xdu$，只要將 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ 兩邊同時乘上 dx 即可。

類題 2

Solve $(y^3 + xy^2 + x^2y)dx - x^3dy = 0$.

〈答〉 $\ln|x| = \ln\left|1 + \dfrac{x}{y}\right| - \dfrac{x}{y} + C$

例題 3

Solve $y' = 2x + y$.

〈解〉

類題 3

Solve $y' = ax + by$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

〈答〉 $\ln\left|ax + by + \dfrac{a}{b}\right| = bx + C$

例題 4

Solve $(2x + y + 1)dx + (4x + 2y + 3)dy = 0$.

〈解〉

類題 4

Solve $(x + 3y + 1)dx = (2x + 6y - 3)dy$.

〈答〉 $-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{6}{5}y - \dfrac{3}{5}\ln|x + 3y| = C$

例題 5

Solve $(x + y - 1)dx + (x - y - 3)dy = 0$.

〈解〉

◎ 例題 5 的手法是為了將常數消掉。若能將常數消掉，原式就會變成齊次型。要消掉 -1 跟 3 這兩個常數，我們將 $x+y-1=0$ 和 $x-y-3=0$ 這兩條直線進行平移，只要這兩條直線的交點平移到原點，則平移後的二直線就不會有常數項了。此外，平移的過程部會使 dx 和 dy 變複雜，故此手法是解此類微分方程的好方法。

類題 5

Solve $(x-2y-4)dx+(2x-y-5)dy=0$.

〈答〉 $-\ln|x-2|=2\ln\left|\dfrac{1+(\frac{y+1}{x-2})}{\sqrt{1-(\frac{y+1}{x-2})^2}}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|1-(\dfrac{y+1}{x-2})^2\right|+C$

◉ 很多失敗不是因為能力有限，而是沒有堅持到底。

主題八　積分因子法 (公式法) 解一階線性常微分方程

1. 型如　　　　　　　　　　　　的微分方程稱為一階線性常微分方程。

2. **如何用積分因子法解一階線性常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$？**

   1° 令積分因子 $\boxed{\phantom{I=e^{\int P(x)dx}}}$ 使 $Iy'+IP(x)y=IQ(x)$ 可湊項

   2° 如何湊項？

   該積分因子滿足 $IP(x)=I'$，故可使原式變成　　　　　　　　　　即

   3° 解 $(Iy)'=IQ(x)$ 得 $y=\dfrac{1}{I}\int IQ(x)dx$

例題 1

Solve $y'+2y=5$.

〈解〉

類題 1

Solve $y'-3y=2$.

〈答〉

例題 2

Solve $y'+\dfrac{1}{x}y=xe^{x}$.

〈解〉

類題 2

Solve $y'-\dfrac{2}{x}y=e^{x}\sin x$.

〈答〉

◎ **為何解一階線性常微分方程的積分因子長那樣?**

解 $y'+P(x)y=Q(x)$ 時，我們乘上一個積分因子 I 使得原式變成 $Iy'+IP(x)y=IQ(x)$，此時若 $IP(x)=I'$，原式就可以變成 $Iy'+I'y=IQ(x)$，又 $Iy'+I'y=(Iy)'$，故原式可再進一步變成 $(Iy)'=IQ(x)$，最後再把兩邊積分，就能得到 $Iy=\int IQ(x)dx$，即 $y=\dfrac{1}{I}\int IQ(x)dx$。

在上面的過程中，能夠解得最後結果的關鍵在於讓 $IP(x)=I'$，因此如果希望能夠獲得最終結果，那麼 $\dfrac{I'}{I}=P(x)$，將此式兩邊積分可得 $\ln|I|=\int P(x)dx$，即 $I=\pm e^{\int P(x)dx}$，取 $I=e^{\int P(x)dx}$，則我們得到能夠解一階線性微分方程的積分因子。

◉ 努力的累積是複利的，越早開始努力，你拿到的利息就越多。