重點三 定積分正式定義

1. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上片段連續，

   令 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 爲 $[a,b]$ 上的一組分割，

   且對任意 $1\le k\le n$，再令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，則：

   (1) 令 $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$，$1\le k\le n$，

   則 $R_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

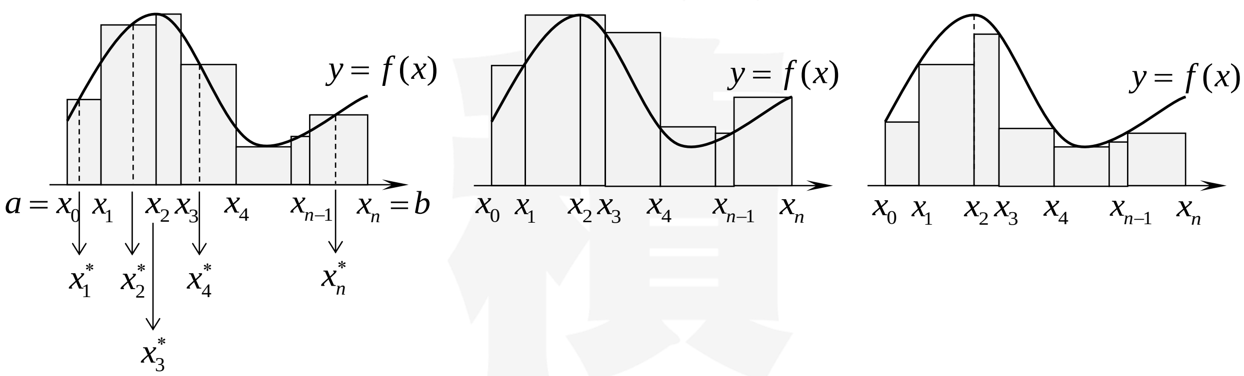
   (2) 令 $M_k=\max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$，$1\le k\le n$，

   則 $U_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

   (3) 令 $m_k=\min\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$，$1\le k\le n$，

   則 $L_{f,[a,b]}=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$ 稱爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 ______________

[圖一] 黎曼和　　[圖二] 上和　　[圖三] 下和



2. 上和 v.s. 下和 v.s. 黎曼和 v.s. $\int_a^b f(x)dx$

   (1) $L_{f,[a,b]}$ ____ $R_{f,[a,b]}$ ____ $U_{f,[a,b]}$

   (2) $L_{f,[a,b]}$ ____ $\int_a^b f(x)dx$ ____ $U_{f,[a,b]}$

(3) 當分割點越來越多時，$L_{f,[a,b]}$ ______ 而 $U_{f,[a,b]}$ ______

(4) 不斷新增分割點使 $\Delta x_k \to 0$，

若 $L_{f,[a,b]}$ 和 $U_{f,[a,b]}$ 趨近同一值 A，

則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是 ____________，並定義 $\int_a^b f(x)dx =$______

3. **關於新增分割點**：

(1) 若 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 爲 $[a,b]$ 上的一組分割，

則可用數列 $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 來表示這組分割，

此時我們可以把上和、下和和黎曼和的符號寫得更清楚一些：

① $U_{f,[a,b]} = U_{f,[a,b],P}$

② $L_{f,[a,b]} = L_{f,[a,b],P}$

③ $R_{f,[a,b]} = R_{f,[a,b],P}$

(2) 若 P_1 和 P_2 均爲 $[a,b]$ 上的一組分割且 $P_1 \subseteq P_2$，

則表示 P_2 爲 P_1 新增了一些分割點後所形成的分割，此時：

① $L_{f,[a,b],P_1}$ ___ $L_{f,[a,b],P_2}$

② $U_{f,[a,b],P_1}$ ___ $U_{f,[a,b],P_2}$

(3) 令 $\|P\| = \max\limits_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1})$，

則 $\|P\| \to 0$ 的意思是在 P 中不斷新增分割點使得 $\|P\|$ 遞減至 0

(4) 運用以上符號，則可將 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可積分的定義重寫如下：

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上片段連續且 P 是 $[a,b]$ 上的分割，

若 ____，

則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是可積分的，並定義 $\int_a^b f(x)dx = A$

例題 1.

Show that $\int_a^b dx = b - a$ with $a < b$ by definition.

解

例題 2. (精選範例 3-1)

Show that $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ by defintion.

解

例題 3. (精選範例 3-2)

Let $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 1 & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, show that $f(x)$ is not integrable over $[0,1]$.

解