

重點九 四大積分基本方法之一：變數變換法

1. 將被積分的函數中的一部分打包起來，有機會能降低積分難度。

說例 $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

$$\text{令 } u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \quad \Rightarrow du =$$

$$\text{則 } \int 2x\sqrt{x^2+1}dx =$$

2. 打包的部分 $u = u(x)$ 時，若出現 $u'(x)dx$ 的話，則積分成功率上升！
3. 定積分在做變數變換時，需注意積分範圍！

說例 $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

$$\text{令 } u = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} du = \\ x=0 \Rightarrow u = \\ x=1 \Rightarrow u = \end{cases}$$

$$\text{則 } \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx =$$

4. 公式：

(1) 不定積分版： $\int f(g(x))g'(x)dx =$ _____

(2) 定積分版： $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx =$ _____

例題 1. (精選範例 9-1)

Find the following integrals.

(1) $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

(2) $\int x \sqrt{x+4} dx$

(3) $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$

解

張
旭
微
積
分

例題 2. (精選範例 9-2)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

(2) $\int \tan x dx$

(3) $\int \sec x dx$

解

張
旭
微
積
分

例題 3. (精選範例 9-3)

Find the following integrals.

(1) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$

解

(2) $\int x^2 e^{x^3+1} dx$

(3) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

張
旭
微
積
分

例題 4. (精選範例 9-4)

Find the following definite integrals.

(1) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin x} dx$

(3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

解

張
旭
微
積
分