重點十一 四大積分基本方法之三：分部積分法

1. 遇到$\int f(x)g(x)dx$ 時，可試著用分部積分法來對付之。

2. 令$F'(x)=f(x)$ 且$G'(x)=g(x)$，則：

   (1) $\int F(x)g(x)dx=$ _____

   (2) $\int_a^b F(x)g(x)dx=$ _____

   證明

   $\because\ (F(x)G(x))'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=f(x)G(x)+F(x)g(x)$

   $\therefore\ F(x)G(x)=\int f(x)G(x)+F(x)g(x)dx=\int f(x)G(x)dx+\int F(x)g(x)dx$

   故 $\int F(x)g(x)dx=F(x)G(x)-\int f(x)G(x)dx$ [Q.E.D.]

3. 分部積分公式的另一種寫法：

   (1) $\int udv=uv-\int vdu$

   (2) $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

例題 1.
Calculate $\int xe^x dx$ and $\int x^2 e^x dx$.

解

例題 2. (精選範例 11-1)
Calculate $\int x\ln x dx$ and $\int \ln x dx$.

解

例題 3. (精選範例 11-2)

Calculate $\int e^x \sin x dx$ and $\int e^x \cosh x dx$.

解

例題 4. (精選範例 11-3)

Calculate $\int \sin^{-1} x dx$ and $\int \tan^{-1} x dx$.

解

例題 5. (精選範例 11-4)
Calculate $\int \sec x dx, \int \sec^2 x dx$ and $\int \sec^3 x dx$.
解

例題 6. (精選範例 11-5)

Show that $\int \sec^{n+2} x dx = \frac{1}{n+1}\sec^n x \tan x + \frac{n}{1+n}\int \sec^n x dx$ holds true for all nonnegative integer n.

解

例題 7. (精選範例 11-6)

Show that $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$ and conclude that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{, if } n \text{ is an even integer } \geq 2 \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n} & \text{, if } n \text{ is an odd integer } \geq 3 \end{cases}$$

解

例題 8. (精選範例 11-7)

Calculate $\int_a^b |x|\,dx$.

解

例題 9. (精選範例 11-8)

Calculate $\int x^4 e^{2x} dx$, $\int x^3 \sin x dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.

解