重點十三 四大積分基本方法之四：部分分式法

1. 遇到 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$（$P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多項式）時，可試著用部分分式法來對付之。

2. 處理步驟：

1°先用除法將 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 寫成 $A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ 的形式，

其中 $A(x)$ 和 $R(x)$ 分別爲 $P(x)\div Q(x)$ 的商式和餘式。

2°則 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int A(x)dx+\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$。$\int A(x)dx$ 可直接積分。

3°利用因式分解將 $\frac{R(x)}{Q(x)}$ 寫成 $\frac{R(x)}{[Q_1(x)]^{p_1}[Q_2(x)]^{p_2}\cdots[Q_n(x)]^{p_n}}$，

其中每一個 $Q_k(x)$ 都是一次式或是二次式。

然後再將之強迫分解成 $\sum_{k=1}^{p_1}\frac{A_{1,k}(x)}{[Q_{1,k}(x)]^k}+\sum_{k=1}^{p_2}\frac{A_{2,k}(x)}{[Q_{2,k}(x)]^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{A_{n,k}(x)}{[Q_{n,k}(x)]^k}$，

其中 $\deg A_k(x)=\deg Q_k(x)-1$。

4°則 $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx=\sum_{k=1}^{p_1}\int \frac{A_{1,k}(x)}{[Q_{1,k}(x)]^k}dx+\sum_{k=1}^{p_2}\int \frac{A_{2,k}(x)}{[Q_{2,k}(x)]^k}dx+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\int \frac{A_{n,k}(x)}{[Q_{n,k}(x)]^k}dx$。

例題 1.

Calculate $\int \frac{2x}{x^2-x-2}dx$.

解

例題 2. (精選範例 13-1)

Calculate $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx$.

解

例題 3. (精選範例 13-2)

Calculate $\int \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

解

例題 4. (精選範例 13-3)

Calculate $\int \frac{x^2+7x+8}{(x+2)(x^2+2x+2)}dx$.

解

例題 5. (精選範例 13-4)

Calculate $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx$.

解

例題 6. (精選範例 13-5)

Calculate $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx$.

解