

第六章 積分(後篇)

- 積分進階計算工具與一些求體積的應用

重點一 進階積分技巧：高次倍角三角函數積分

1. 高次三角函數積分 (此處 m 和 n 均為非負整數)

(1) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 型

① m 為奇數 $\Rightarrow \sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x$

② n 為奇數 $\Rightarrow \cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x$

③ m, n 全偶 \Rightarrow 利用降次公式 $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$

(2) $\int \sec^m x \tan^n x dx$ 型

① n 為偶數：

Step 1 用 $\tan^n x = \tan^{2k} x = (\tan^2 x)^k = (\sec^2 x - 1)^k$ 換全 $\sec^p x$

Step 2 用 $\int \sec^{n+2} x dx = \frac{1}{n+1} \sec^n x \tan x + \frac{n}{1+n} \int \sec^n x dx$

► $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$; $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

② m 為偶數

$\Rightarrow \sec^m x = \sec^{2k+2} x = (\sec^2 x)^k \sec^2 x = (1 + \tan^2 x)^k \sec^2 x$

③ m, n 全奇：

Step 1 $\sec^m x \tan^n x = \sec^{2k+1} x \tan^{2k'+1} x = \sec^{2k} x \tan^{2k'} x (\sec x \tan x)$

Step 2 $\tan^{2k'} x = (\tan^2 x)^{k'} = (\sec^2 x - 1)^{k'}$

2. 倍角三角函數積分

遇 $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ 或 $\int \cos mx \cos nx dx$

⇒ 利用三角函數的積化和差公式：

$$\textcircled{1} \quad 2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$\textcircled{2} \quad -2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

$$\textcircled{3} \quad 2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

例題 1. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin x \cos^4 x dx$

解

例題 2. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

解

張 旭 微 積 分

例題 3. (精選範例 1-1)

Calculate $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

解

張 旭 微 積 分

例題 4. (精選範例 1-2)

Calculate $\int \sin 5x \cos 3x dx$

解

張 旭 微 積 分

例題 5. (精選範例 1-2)

Calculate $\int \sin x \cos 3x \cos 5x dx$

解

張
旭
微
積
分

例題 6. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \tan^5 x \sec^4 x dx$

解

張 旭 微 積 分

例題 7. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

解

張 旭 微 積 分

例題 8. (精選範例 1-3)

Calculate $\int \sec^3 x \tan^6 x dx$

解

張 旭 微 積 分