

### 重點三 特殊積分形式之其二：含無窮的積分 (瑕積分)

1. 瑕積分兩種形式：

(1)  $\int_a^b f(x)dx$  其中  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$  ,  $c \in [a, b]$

(2)  $\int_a^b f(x)dx$  其中  $a = -\infty$  或  $b = \infty$

2. 求  $\int_a^b f(x)dx$  時，若遇

(1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  且  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$  其中  $c \in (a, b)$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(5)  $a = -\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(6)  $b = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(7)  $a = -\infty$  且  $b = \infty$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

**說例**

①  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$                       ②  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{t^2} dt$

③  $\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_{-1}^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx + \lim_{s \rightarrow 2^+} \int_s^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$

3. 注意事項：

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x)dx$$

$$(2) \text{ 若 } f(x) \text{ 爲偶函數，則 } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx$$

$$(3) \text{ 若 } f(x) \text{ 爲奇函數，必注意 } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ 不一定爲 } 0$$

**說例**

求  $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$  時，因  $\int_{-\infty}^c xdx = -\infty$  但  $\int_c^{\infty} xdx = \infty$  所以  $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$  無法計算

**例題 1.**

Calculate  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

**解**

例題 2. (精選範例 3-1)

Calculate  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$

**解**

# 張 旭 微 積 分

例題 3. (精選範例 3-2)

Calculate  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$

**解**

# 張 旭 微 積 分

例題 4. (精選範例 3-3)

Calculate  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

**解**

# 張 旭 微 積 分