重點八 牛頓法

1. 我們都知道 $\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$ 的一個根 ，但 $\sqrt{2}$ 只是一種表示法；我們也知道 $\sqrt{2}\approx 1.414...$，但如何得到更精準一點的答案呢，牛頓法提供我們一種演算方式。

2. **牛頓法**解 $x^2-2=0$：

   1° 取 $x_0=1$，造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_0=1$ 的切線 $y=L_1(x)=2x-3$

   2° 解 $y=L_1(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_1=\dfrac{3}{2}=1.5$，

   造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_1=\dfrac{3}{2}$ 的切線 $y=L_2(x)=3x-\dfrac{17}{4}$

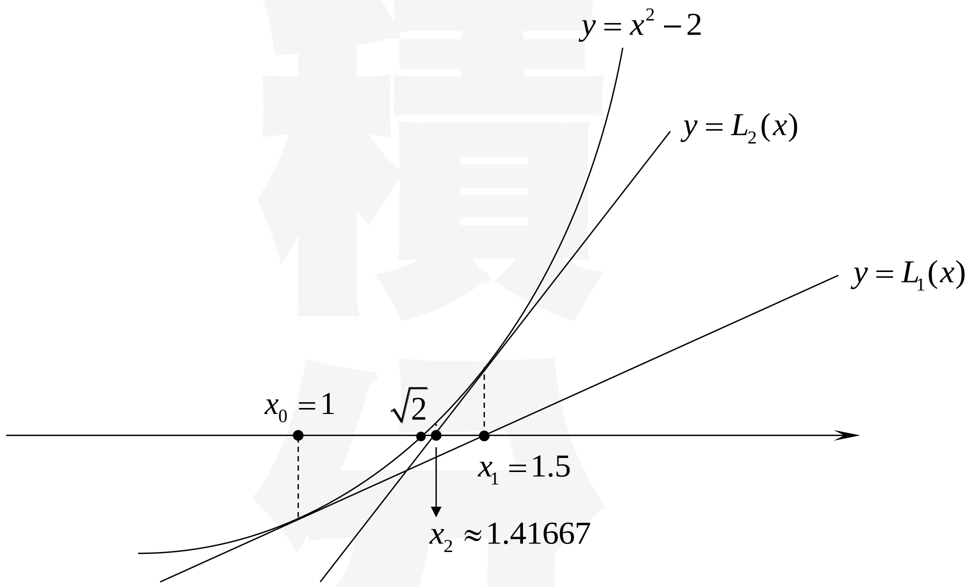
   3° 解 $y=L_2(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_2=\dfrac{17}{12}\approx 1.41667$，

   造一條 $f(x)=x^2-2$ 在 $x=x_2=\dfrac{17}{12}$ 的切線 $y=L_3(x)=\dfrac{17}{6}x-\dfrac{577}{144}$

   4° 解 $y=L_3(x)$ 和 x 軸的交點得 $x_3=\dfrac{1731}{1224}\approx 1.41422$，

   造一條⋯

   重複此動作，則可得一數列 $\{x_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$



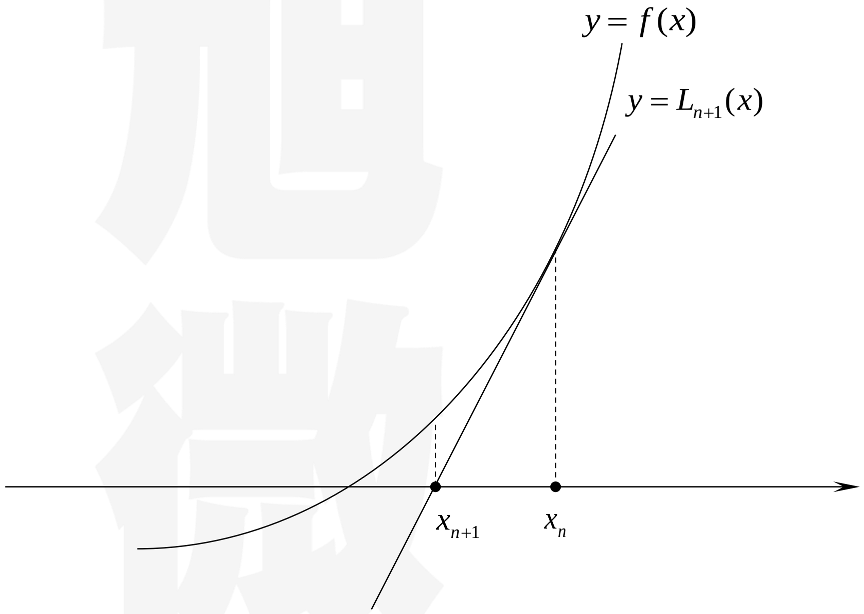
3. **牛頓法公式：**

1° 定一個恰當的起始點 x_0

2° 利用 $\boxed{x_{n+1} = \qquad\qquad}$ 造出一數列 $\{x_n\}$，

則此數列可能會收斂至 $f(x)=0$ 之根

說明



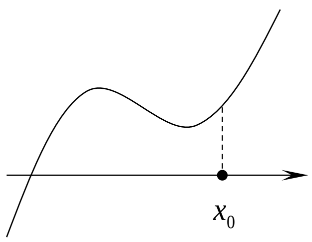
4. **牛頓法公式可能失效：**

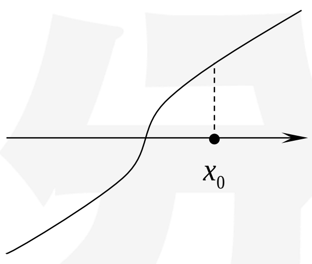
起始點取的不好，導致數列

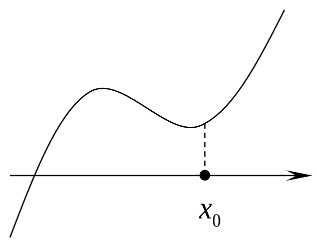
(1) 離根越來越遠

(2) 在幾個點上周期性地移動

(3) 某個 x_n 使 $f'(x_n)=0$ 以致於得不到 x_{n+1}







例題 1.
Use Newton's method to estimate the solutions of the equation $x^2+x-1=0$ by starting with $x_0=-1$.

解

例題 2. (精選範例 8-1)

Estimate π by applying Newton's method to solve the equation $\tan x = 0$ with $x_0 = 3$.

解

例題 3. (精選範例 8-2)
Estimate $\sqrt{3}$.

解