

重點四 微分求極值法

設 $f(x)$ 為一在 (a,b) 上可微且在 $[a,b]$ 上連續的函數， $x_0 \in (a,b)$ 。

1. 遞增、遞減：

(1) 對所有 $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ _____

(2) 對所有 $x \in (a,b)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ _____

說明

(1) For any $x_1, x_2 \in [a,b]$, W.L.O.G., may assume $x_1 < x_2$

By M.V.T., $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$ for some $c \in (x_1, x_2)$

By assumption, $f'(x) > 0$ and thus $f(x_1) < f(x_2)$

Thus $f(x)$ increases strictly on (a,b) .

(2) Similar to (1). [Q.E.D.]

2. 凹上、凹下：(此處假設 $f(x)$ 二次可微)

(1) 對所有 $x \in (a,b)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ _____

(2) 對所有 $x \in (a,b)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ _____

說明

(1) By assumption, we have $f'(x)$ increase strictly on $[a,b]$

Thus $f(x)$ is concave up on $[a,b]$.

(2) Similar to (1). [Q.E.D.]

3. 一次微分檢驗法：

(1) 若在 x_0 左邊都滿足 $f'(x) > 0$ 且在 x_0 右邊都滿足 $f'(x) < 0$ ，

則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 _____

(2) 若在 x_0 左邊都滿足 $f'(x) < 0$ 且在 x_0 右邊都滿足 $f'(x) > 0$,

則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 _____



4. 二次微分檢驗法：

假設 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0)$ 存在

(1) 若 $f''(x_0) > 0$, 則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 _____

(2) 若 $f''(x_0) < 0$, 則 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的 _____

記憶

5. 注意事項：

(1) 拿到題目都先解 _____ 或 _____ 找臨界點 (極值候選人)

(2) 判斷最大最小值時優先使用 _____ , 若不行再使用 _____

(3) 兩種檢驗法只能找出在 (a,b) 上的 _____

(4) 欲求絕對極值, 需將檢驗法所得到的相對極值和兩端點的函數值 (也就是 $f(a)$ 和 $f(b)$) 比大小。其中最大就是 _____ , 其中最小就是 _____

(5) 若 $f(x)$ 並沒有在 (a,b) 上到處可微的話, 極值候選人可能會增加：

$f(x_0)$ 是一個相對極值 \Rightarrow _____

例題 1.

For the following functions, find all extrema:

(1) $f(x) = 3x^2 - x + 7$

(2) $f(x) = |x^2 - 1|$

(3) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ on $[-1, 2]$

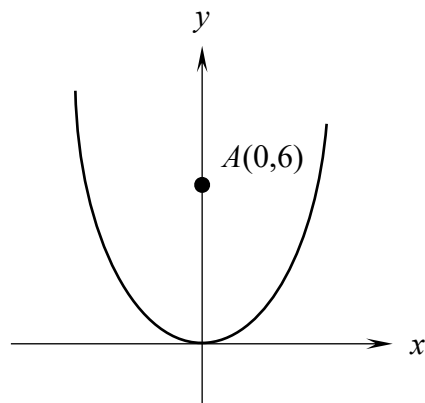
(4) $f(x) = 2\sin x + \cos x$ on $[0, 2\pi]$

解

例題 2. (精選範例 4-1)

Find the point(s) on the parabola $y = \frac{1}{8}x^2$ closet to the point $A(0,6)$.

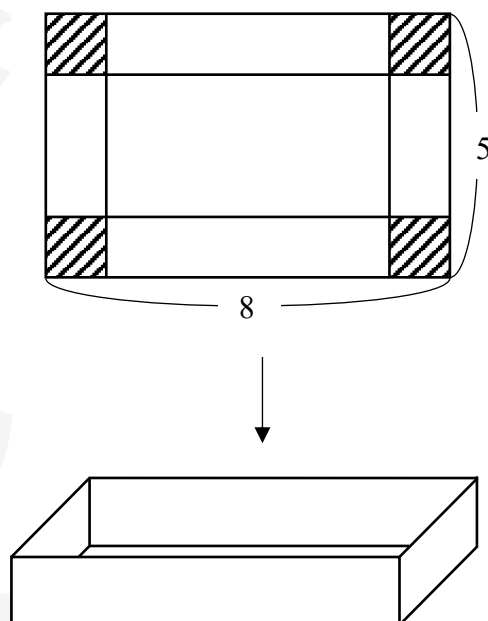
解



張
旭
微
積
分

例題 3. (精選範例 4-2)

A box without a top is to be made by cutting small squares, of equal size from the corners of an 8×5 inch piece of card and then taping up the sides. Find the maximum possible volume for the box.

解

例題 4. (精選範例 4-3)

- (1) Suppose $f'(x_0) = 0$, must $f(x_0)$ be a local extrema?
- (2) Suppose $f(x)$ increases on (a, x_0) and decreases on (x_0, b) , must $f(x_0)$ be a local extrema?
- (3) Suppose $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, must $(x_0, f(x_0))$ be a point of inflection?
- (4) Suppose $(x_0, f(x_0))$ is a point of inflection, must $f''(x_0)$ be 0?

解

張旭
微積分