第一章 數列與級數

- 目標是將函數展開分析

重點一 數列與數列的極限

1. 大學數列和高中數列的差別

(1) 大學只考慮無窮數列，也就是項數有無窮多項

(2) 大學數列符號：$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

2. 數列極限的定義

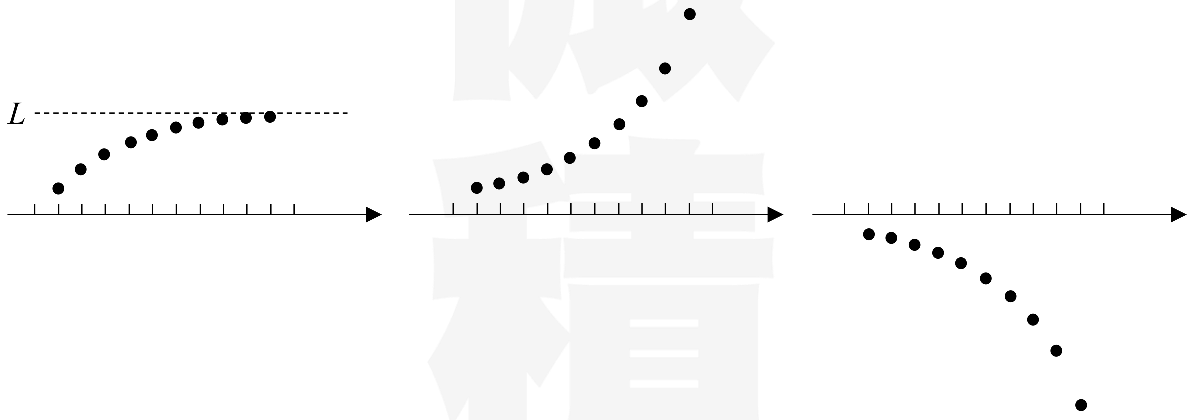
令 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$ ______________________________

此情況我們稱 $\{a_n\}$ 收斂 (converge) 到 L，否則稱發散 (diverge)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow$ ______________________________

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow$ ______________________________



3. 並非只有發散到正負無窮大的數列才叫做發散

$\boxed{\text{說例}}$

(1) $a_n = (-1)^n$

(2) $a_n = \begin{cases} 0 & ,n \text{ 為偶數} \\ n & ,n \text{ 為奇數} \end{cases}$

例題 1.

Show that $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

解

例題 2. (精選範例 1-1)

Show that $\lim_{n\to\infty}c=c$.

解

例題 3. (精選範例 1-2)

Show that $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

解

例題 4. (精選範例 1-3)

Show that $\lim_{n\to\infty}(5-n) = -\infty$.

解

例題 5.　(精選範例 1-4)

Show that $\lim_{n\to\infty}(n^2+n+1)=\infty$.

解

例題 6.　(精選範例 1-5)

Show that $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$.

解

例題 7. (補充教材 1-1)

Let $a_n = (-1)^n$, show that $\{a_n\}$ diverges.

解

例題 8. (補充教材 1-2)

If $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ and $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$, then $L = M$.

解

例題 9.　(補充教材 1-3)

If $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, then $\exists N \in \mathbb{N}$ such that, if $n \ge N$, then $|a_n| < 1 + |L|$.

解

例題 10. (補充教材 1-4)

If $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M \neq 0$, then $\exists N \in \mathbb{N}$ such that, if $n \ge N$, then $|b_n| > \dfrac{|M|}{2}$.

解

重點二 數列極限的運算性質

1. 四則運算

設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$，$c\in\mathbb{R}$，則：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) =$ ____________

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) =$ ____________

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) =$ ____________

(4) 當 $M\neq 0$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{b_n}) =$ ____________

說明

(1) Given $\varepsilon > 0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\therefore \exists N\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N$, $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{|c|+1}$

Now, for such N, if $n\geq N$,

then $|c\cdot a_n - c\cdot L| < |c||a_n - L| < |c|\cdot\dfrac{\varepsilon}{|c|+1} < \varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot L$ Q.E.D.

(2) Given $\varepsilon > 0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ and $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$

$\therefore \exists N_1\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_1$, $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_2$, $|b_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Now, for such N_1 and N_2, if $n\geq \max\{N_1, N_2\}$,

then $|(a_n + b_n) - (L+M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$ Q.E.D.

(3) Given $\varepsilon > 0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ and $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$

$\therefore \exists N_1\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_1$, $|a_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$

$\exists N_2\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_2$, $|b_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|L|)}$

$\exists N_3 \in \mathbb{N}$ such that, if $n \ge N_3$, $|a_n| < 1 + |L|$

Now, for such N_1, N_2 and N_3, if $n \ge \max\{N_1, N_2, N_3\}$,

then $$\begin{aligned}|(a_n \cdot b_n) - (L \cdot M)| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot M + a_n \cdot M - L \cdot M| \\ &\le |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L| \\ &< (1+|L|)\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)} + |M|\frac{\varepsilon}{2(M+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Since ε is arbitrary, $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$ Q.E.D.

(4) First we show that $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}$

Given $\varepsilon > 0$

$\because \lim_{n\to\infty} b_n = M$

$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N}$ such that, if $n \ge N_1$, $|b_n - M| < \frac{M^2\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ such that, if $n \ge N_2$, $|b_n| > \frac{|M|}{2}$

Now, for such N_1 and N_2, if $n \ge \max\{N_1, N_2\}$,

then $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} < \frac{2}{|M|} \cdot \frac{1}{|M|} \cdot \frac{M^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{b_n}) = \frac{1}{M}$

Finally, by (3), we have $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot \frac{1}{b_n}) = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$ Q.E.D.

2. 合成運算

令 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$,

若 $f(x)$ 在 $x = a_n$ 上有定義且在 $x = L$ 上連續

則：$\lim_{n\to\infty} f(a_n) =$ __________

說明

Given $\varepsilon > 0$

$\because$ $f(x)$ is continuous at $x = L$

$\therefore \lim_{x\to L} f(x) = f(L)$

That is, $\exists \delta > 0$ such that, if $|x - L| < \delta$, $|f(x) - f(L)| < \varepsilon$

Now, for such $\delta > 0$

$\because \lim_{n\to\infty} a_n = L$

$\therefore \exists N \in \mathbb{N}$ such that, if $n \geq N$, $|a_n - L| < \delta$

Now, for such N, if $n \geq N$,

then $|a_n - L| < \delta$ and thus $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$ Q.E.D.

例題 1.

Find the following limits.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n^2+n+1}$ (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n-3}{7n^2-3n+1}$ (3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-11n+2}{2n+5}$

解

例題 2. (精選範例 2-1)

Show that $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & , \text{ if } 0 < a < 1 \\ \infty & , \text{ if } a > 1 \end{cases}$ by definition.

解

例題 3. (精選範例 2-2)

Find the following limits.

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^n+5\cdot 3^n}{(-3)\cdot 7^n-5\cdot 4^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n-2\cdot 3^n}{6\cdot 2^n+3\cdot 5^n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{7\cdot 8^n+2^n}{3^n-25\cdot 4^n}$

解

例題 4. (精選範例 2-3)

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=?$

解

例題 5. (精選範例 2-4)

$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n-1}\sqrt{n-2})=?$

解

例題 6. (精選範例 2-5)

$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{\pi}{n})=?$

解

例題 7. (精選範例 2-6)

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=?$

解

例題 8.　(精選範例 2-7)

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}=?$

解

例題 9.　(精選範例 2-8)

$\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln(n))=?$

解

重點三 數列連續化求極限法

1. 可將數列用一連續函數代替來計算極限

設 $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$ 且 $f(x)$ 在 $[N,\infty)$ 有定義

若對任意 $n\geq N$ 均有 $f(n)=a_n$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$

則：____________________

說明

Given $\varepsilon>0$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$

$\therefore \exists M\in\mathbb{N}$ such that, if $x\geq M$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

Now, for such M, if $n\geq\max\{M,N\}$,

then $|a_n-L|=|f(n)-L|<\varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ Q.E.D.

說例

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 時，因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$

2. 上述計算方式反過來不一定成立

說例

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ 但 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x\pi)$ 不存在

例題 1. (精選範例 3-1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\tan^{-1}n}{\ln(1+n^2)}=?$$

解

例題 2. (精選範例 3-2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=?$$

解

重點四 夾擠定理

◎ 定理內容

設 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\subseteq\mathbb{R}$

若 $\begin{cases} ① \text{ 存在一正整數 } N \text{ 使得凡是 } n\geq N \text{ 則 } b_n\leq a_n\leq c_n \\ ② \text{ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ } \end{cases}$

則：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\boxed{\text{說明}}$

Given $\varepsilon>0$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

$\therefore \exists N_1\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_1$, $|b_n-L|<\varepsilon$ and thus $b_n>L-\varepsilon$

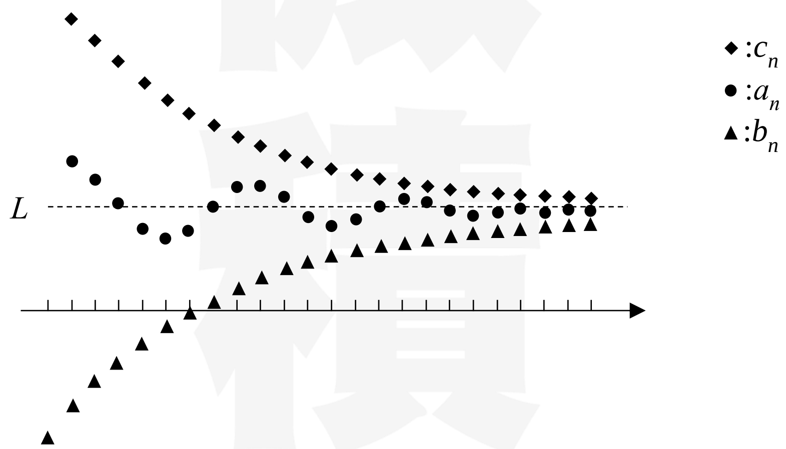
$\because \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

$\therefore \exists N_2\in\mathbb{N}$ such that, if $n\geq N_2$, $|c_n-L|<\varepsilon$ and thus $c_n<L+\varepsilon$

Now, for such N_1 and N_2, if $n\geq \max\{N_1,N_2\}$,

then $L-\varepsilon<b_n\leq a_n\leq c_n<L+\varepsilon$ and thus $|a_n-L|<\varepsilon$

Since ε is arbitrary, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ Q.E.D.



例題 1.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=?$

解

例題 2.（精選範例 4-1）

$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=?$

解

例題 3. (精選範例 4-2)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=?\ \ (a>0, a\neq 1)$

解

重點五 單調數列與有界數列

1. 遞增數列與遞減數列

(1) 若對任意正整數 n 均有 $a_{n+1} \leq a_n$，則稱此 $\{a_n\}$ 為 ________ 數列

(2) 若對任意正整數 n 均有 $a_{n+1} \geq a_n$，則稱此 $\{a_n\}$ 為 ________ 數列

(3) 若對任意正整數 n 均有 $a_{n+1} < a_n$，則稱此 $\{a_n\}$ 為 ________________ 數列

(4) 若對任意正整數 n 均有 $a_{n+1} > a_n$，則稱此 $\{a_n\}$ 為 ________________ 數列

(5) 以上四種數列統稱為單調數列

2. 數列的上界與下界

(1) 若存在正數 M 使得對任意正整數 n 均有 ____________，則稱此 $\{a_n\}$ 有上界

(2) 若存在正數 M 使得對任意正整數 n 均有 ____________，則稱此 $\{a_n\}$ 有下界

(3) 若存在正數 M 使得對任意正整數 n 均有 ____________，則稱此 $\{a_n\}$ 有界

3. 單調有界數列的收斂性

(1) 若 $\{a_n\}$ 遞增有上界，則必收斂

(2) 若 $\{a_n\}$ 遞減有下界，則必收斂

(3) 若 $\{a_n\}$ 單調有界，則必收斂

例題 1.

Let $a_1 = 1$ and $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, show that $\{a_n\}$ converges and find its limit.

解

例題 2. (精選範例 5-1)

Let $a_1 = 2$ and $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, find $\lim_{n \to \infty} a_n$.

解

重點六 級數

1. 大學級數與高中級數的差別

(1) 大學的級數通常是指無窮級數，也就是項數有無窮多項

(2) 大學級數符號：$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) 承 (2)，我們定 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 並稱之為 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和 (partial sum)

2. 級數收斂的定義

設 $\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L \in \mathbb{R} \iff$ ____________________

此情況我們稱 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂 (converge) 到 L，否則稱發散 (diverge)

例題 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k^2-1} = ?$$

解

例題 2. (精選範例 6-1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-3k-2}{k^2(k+1)^2}=?$$

解

例題 3. (精選範例 6-2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=?$$

解

例題 4.　(精選範例 6-3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}=?$$

解

例題 5.　(補充教材 6-1)

Show that if $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converges then $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

解

重點七 級數的運算性質

◎ 級數的運算性質

設 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$，$c \in \mathbb{R}$，則：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k) =$ ____________

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) =$ ____________

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k)$ __ $A \cdot B$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{a_k}{b_k})$ __ $\frac{A}{B}$

説明

(1) $\because \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = A$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = \lim_{n\to\infty}(c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k) = c \cdot A$

(2) $\because \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ and $\because \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = A$ and $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = B$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k) = A + B$

(3)(4) Counter example:

Let $a_n = (\frac{1}{3})^n$ and $b_n = (\frac{1}{2})^n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^k = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ and $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

But $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}[(\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{1}{2})^k] = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{6})^k = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2} \cdot 1$

and $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{a_k}{b_k})=\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(\frac{1}{3})^k}{(\frac{1}{2})^k}]=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2\neq\frac{\frac{1}{2}}{1}$ Q.E.D.

(上面計算過程用到等比級數性質，在下一個重點會說明)

例題 1. (精選範例 7-1)

True or false?

(A) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converges and $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ diverges, then $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ diverges.

(B) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ and $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ both diverge, then $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ diverges.

(C) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ and $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ both diverge, then $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ converges.

(D) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ converges, then $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ and $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ both diverge.

解

重點八 級數審斂法一：等比級數

◎ 等比數列和等比級數性質

令 $a_n = ar^{n-1}$，則：

(1) $\{a_n\} = \{a, ar, ar^2, \ldots\}$ 稱為等比數列 (geometric process)

(2) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{，若 } \underline{\hspace{3cm}} \\ a & \text{，若 } \underline{\hspace{3cm}} \\ \text{發散} & \text{，若 } \underline{\hspace{3cm}} \end{cases}$$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ 稱為等比級數 (geometric series)

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & \text{，若 } -1 < r < 1 \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{，若 } r \le -1 \text{ 或 } r \ge 1 \end{cases}$$

說明

Proof of (4):

Let $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$,

then $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$

$\Rightarrow s_n - rs_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$

$$\Rightarrow s_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & \text{, if } -1 < r < 1 \\ \text{diverges} & \text{, if } r \le -1 \text{ or } r \le 1 \end{cases}$$ Q.E.D.

例題 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k} = ?$$

解

例題 2. (精選範例 8-1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}=?$$

解

例題 3. (精選範例 8-2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^k}=?$$

解

重點九 級數審斂法二：p-級數

◎ p-級數性質

令 $a_n=\dfrac{1}{n^p}$ $(p>0)$，則：

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$ 稱為 p-級數 (p-seies)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\begin{cases}\text{收斂} & ，若\ p>1\\ \text{發散} & ，若\ 0<p\le 1\end{cases}$

說明

For $p=1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

For $p<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$$

For $p>1$:

Let $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$,

then $s_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{6^p}+\dfrac{1}{7^p}+\dfrac{1}{8^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$

$$<1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$
$$<1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots$$
$$=1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots$$
$$=1+2^{1-p}+(2^{1-p})^2+(2^{1-p})^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-2^{1-p}}\quad (\text{since }\ p>1\ \text{implies that }\ 2^{1-p}<1)$$

$\Rightarrow$ $\{s_n\}$ has upper bound

$\because\{s_n\}$ increases

$\therefore \{s_n\}$ converges and thus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges Q.E.D.

例題 1.

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$ converges or diverges.

解

例題 2. (精選範例 9-1)

Determine whether $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ converges or diverges.

解

重點十 級數審斂法三：比較審斂法

1. 比較審斂法：(comparison test)

設對任意正整數 n 均有 $0 \le a_n \le b_n$

(1) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收斂，則 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ________

(2) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 發散，則 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ________

2. 注意事項：

同比較審斂法的條件

(1) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 發散，不保證 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 發散

(2) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂，不保證 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收斂

例題 1.

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + \sqrt{k}}$ converges or diverges.

解

例題 2. (精選範例 10-1)

Determine whether $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ converges or diverges.

解

例題 3. (精選範例 10-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converges or diverges.

解

重點十一 級數審斂法四：極限比較審斂法

1. 極限比較審斂法：(limit comparison test)

設對任意正整數 n 均有 $a_n, b_n > 0$

令 $r = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

(1) 若 $r = 0$，則：$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 發散} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 收斂} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

(2) 若 $r \in \mathbb{R}$ 且 $r \neq 0$，則：$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 發散} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收斂} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

(3) 若 $r = \infty$，則：$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收斂} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 發散} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ \_\_\_\_\_\_} \end{cases}$

2. 注意事項：

同極限比較審斂法的條件

(1) 當 $r = 0$ 時，$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收斂不保證 } \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 收斂} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 發散不保證 } \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 發散} \end{cases}$

(2) 當 $r = \infty$ 時，$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 發散不保證 } \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 發散} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 收斂不保證 } \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收斂} \end{cases}$

例題 1.

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{k})$ converges or diverges.

解

例題 2.（精選範例 11-1）

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^{\frac{3}{2}}}$ converges or diverges.

解

例題 3. (精選範例 11-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k+2}$ converges or diverges.

解

例題 4. (精選範例 11-3)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3+3k}}$ converges or diverges.

解

重點十二 級數審斂法五：比值審斂法

◎ **比值審斂法：(ratio test)**

設對任意正整數 n 均有 $a_n > 0$

令 $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(1) 若 $r < 1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ________

(2) 若 $r > 1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ________

(3) 若 $r = 1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ________________

説例

若 $a_n = \dfrac{1}{n}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ 發散

若 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ 收斂

例題 1. (精選範例 12-1)

Determine whether $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2k)!}{(k!)^2}$ converges or diverges.

解

例題 2. (精選範例 12-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$ converges or diverges.

解

例題 3. (精選範例 12-3)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 5^k}{k!}$ converges or diverges.

解

重點十三 級數審斂法六：根值審斂法

◎ **根值審斂法：(root test)**

設對任意正整數 n 均有 $a_n>0$

令 $r=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}$

(1) 若 $r<1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ________

(2) 若 $r>1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ________

(3) 若 $r=1$，則：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ______________

說例

若 $a_n=\dfrac{1}{n}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}=1$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 發散

若 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}=1$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ 收斂

(以上計算過程省略處請自行驗證)

例題 1.

Determine whether $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^3}{3^k}$ converges or diverges.

解

例題 2. (精選範例 13-1)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{1+k})^k$ converges or diverges.

解

例題 3. (精選範例 13-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}k(\frac{1}{2})^k$ converges or diverges.

解

重點十四 級數審斂法七：積分審斂法

◎ **積分審斂法：(integral test)**

設對任意正整數 n 均有 $a_n > 0$ 且 $\{a_n\}$ 為一遞減數列

若 $f(x)$ 為一定義在 $[N,\infty)$ 上的連續遞減正值函數且對任意 $n \ge N$ 均有 $f(n) = a_n$

則：____

$\boxed{\text{說明}}$

$\because f(x)$ decrease on $[N,\infty)$

$\therefore \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=N+1}^{\infty} f(k) \le \int_N^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=N}^{\infty} f(k) = \sum_{k=N}^{\infty} a_k$

So, if $\int_N^{\infty} f(x)dx$ diverges, then $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ diverges and thus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverges

This shows that if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges then $\int_N^{\infty} f(x)dx$ converges

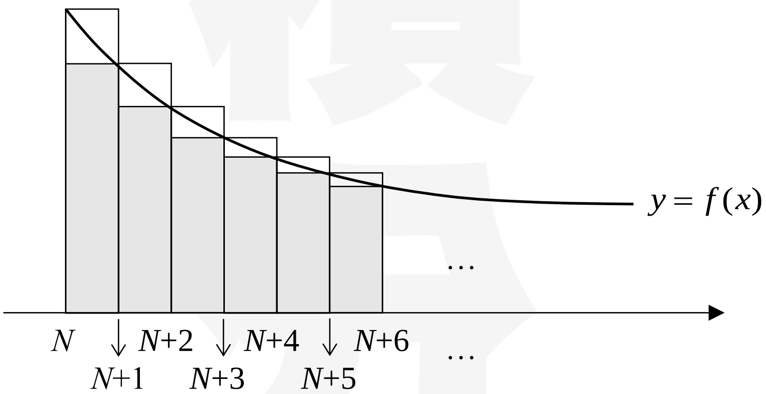
On the other hand, if $\int_N^{\infty} f(x)dx$ converges, say $\int_N^{\infty} f(x)dx = L$,

then $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{N} a_k + \int_N^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{N} a_k + L$

This shows that $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ has upper bound

In this case, since $a_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, $\{s_n\}$ increases, we have $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges

Therefore, $\int_N^{\infty} f(x)dx$ converges if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges Q.E.D.



例題 1.

Discuss the convergence of $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

解

例題 2. (精選範例 14-1)

Discuss the convergence of $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ for $p>0$.

解

例題 3. (精選範例 14-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{1+k^2}$ converges or diverges.

解

重點十五 級數審斂法八：交錯級數審斂法

◎ **交錯級數審斂法：(alternating series test)**

設對任意正整數 n 均有 $a_n > 0$

若 $\{a_n\}$ 遞減且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

則：____________ 必收斂

其中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$ 稱為交錯級數

說明

Note that $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$,

$\{s_{2n}\}$ increases since $\{a_n\}$ decreases implies that $a_{2k-1} - a_{2k} \ge 0$ for all $k \in \mathbb{N}$

Also, since $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1$ for all $n \in \mathbb{N}$,

$\{s_{2n}\}$ has upper bound

So $\{S_{2n}\}$ converges, say $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = L$

On the other hand,

note that $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$,

since $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} + a_{2n+1}) = L + 0 = L$

Finally, since $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = L$

we see that $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ which means that $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converges Q.E.D.

例題 1.

Determine whether $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(k\pi)}{k}$ converges or diverges.

解

例題 2.　(精選範例 15-1)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k+1}$ converges or diverges.

解

例題 3.　(精選範例 15-2)

Determine whether $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{k}$ converges or diverges.

解

重點十六 絕對收斂和條件收斂

1. 絕對收斂 (converges absolutely) 的定義：

設 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 被稱為絕對收斂 $\Leftrightarrow$ ____________________

(2) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 絕對收斂，則 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 必收斂

說明

Note that $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ implies that $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$

$\because \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converges

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ converges

Thus, by comparison test, we have $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converges Q.E.D.

2. 條件收斂 (converges conditionally) 的定義：

設 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂但不絕對收斂

則稱 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 為 ____________________

說例

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ 收斂 (根據交錯級數審斂法)

但 $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 發散 (根據 p-級數審斂法)

可知 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ 為條件收斂

例題 1.

Determine whether $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k\ln k}$ converges absolutely, converges conditionally or diverges.

解

例題 2. (精選範例 16-1)

Determine whether $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2\sqrt{k}}{k^2+1}$ converges absolutely, converges conditionally or diverges.

解

重點十七 冪級數

1. 冪級數 (power series) 的定義：

設 $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$，型如 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 者，稱之為冪級數

(1) 其中 a 稱為中心

(2) a_k 稱為第 k 次項係數

$\boxed{\text{說例}}$

① $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 是一個以 0 為中心的冪級數，其中第 k 次項係數為 $\frac{1}{k!}$

此級數對任意 $x\in\mathbb{R}$ 均收斂，故收斂區間為 $(-\infty,\infty)$，收斂半徑為 ∞

② $\sum_{k=0}^{\infty}(x-2)^k$ 是一個以 2 為中心的冪級數，其中第 k 次項係數為 1

此級數當 $|x-2|<1$ 時均收斂，故收斂區間為 $(1,3)$，收斂半徑為 1

2. 收斂區間與收斂半徑：

設 $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$，

(1) 若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 在 $|x-a|=R$ 上收斂，則在 $|x-a|<R$ 上均收斂

(2) 若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 在 $|x-a|=R$ 上發散，則在 $|x-a|>R$ 上均發散

(3) 若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 在 $|x-a|<R$ 上均收斂且在 $|x-a|=R$ 有不收斂點，

則 ________________ 稱為 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 的收斂區間，而 ______ 稱為收斂半徑

(4) 如何計算收斂半徑？ (此公式僅針對無缺項型，有缺項型參考例題 3)

① 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in\mathbb{R}$，則收斂半徑 $R=$ ______________

② 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}\in\mathbb{R}$，則收斂半徑 $R=$ ______________

(5) 設 R 為 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 之收斂半徑，則：

① $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 在 ________________ 上必絕對收斂

② $\sum_{k=0}a_k(x-a)^k$ 在 ________________ 上必發散

③ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ 在 $|x-a| = R$ 上可能收斂也可能發散

說例

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ 中，收斂半徑 $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1$

故當 $|x|<1$ 時 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ 絕對收斂；當 $|x|>1$ 時 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k}$ 發散

而當 $x=1$ 時，$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ 為發散 (根據 p-級數審斂法)

又當 $x=-1$ 時，$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ 為收斂 (根據交錯級數審斂法)

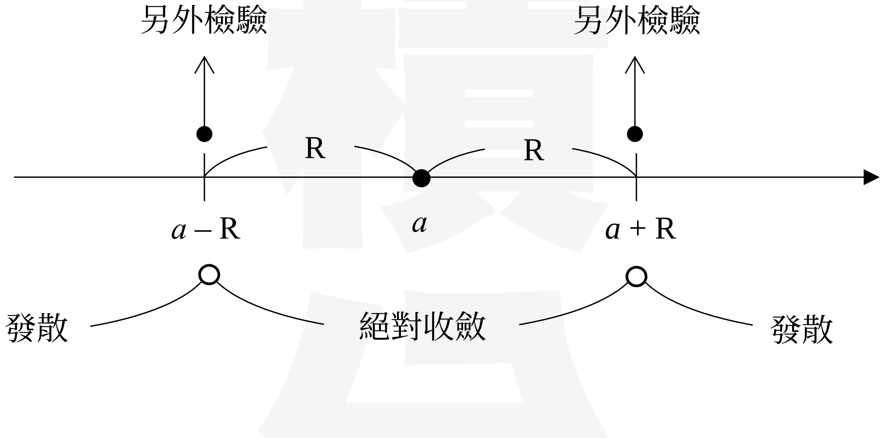
結論：

收斂區間：$[-1,1)$

絕對收斂處：$(-1,1)$

條件收斂處：$x=-1$

發散處：$(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$



例題 1. (精選範例 17-1)

Find the interval of convergence for $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k x^k}{\sqrt{k+1}}$.

解

例題 2. (精選範例 17-2)

Find the interval of convergence for $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k (x+1)^k}{2^k k}$.

解

例題 3. (精選範例 17-3)

Find the interval of convergence for $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

解

重點十八 冪級數的運算

1. 冪級數的係數積和加法：

設 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{R}$ 且 $c\in\mathbb{R}$

若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 的收斂半徑為 R_1 且 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k$ 的收斂半徑為 R_2，則：

(1) $c\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}ca_k(x-a)^k$ 且其收斂半徑為 ______

(2) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-a)^k$ 且其收斂半徑為 ______

說例

已知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ 的收斂半徑為 1 且 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 的收斂半徑為 ∞

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k!})x^k$ 且其收斂半徑為 1

當 $x=1$ 時，由於 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ 發散且 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 收斂，故冪級數和發散

當 $x=-1$ 時，由於 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ 均收斂，故冪級數和收斂

因此冪級數和的收斂區間為 $[-1,1)$

2. 冪級數的乘法：

設 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{R}$

若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 的收斂半徑為 R_1 且 $\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k$ 的收斂半徑為 R_2，則：

(1) $\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k\right]\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k$ 且其收斂半徑為 ______

(2) $c_k=$ ______

說明

Let $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k)(\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k)$

$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$

$\Rightarrow\ c_0=a_0b_0$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\vdots$$

Continue this process, we have $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ Q.E.D.

3. 冪級數的除法：

冪級數的除法用 ______________ 或 ____________ 求解

說例

(1) $\dfrac{x^2}{x+1} = x^2 \cdot \dfrac{1}{1-(-x)} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^{k+2}$ 且其收斂半徑為 $|-x| < 1$

(2) 求 $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$ 除以 $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k$：

如右側算式

所求 $= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\
\hline
1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \cdots & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdots \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\hline
 & & 2 & 6 & 12 & 20 & \cdots \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \\
\hline
 & & & 2 & 6 & 12 & \cdots \\
 & & & 2 & 4 & 6 & \cdots \\
\hline
 & & & & 2 & 6 & \cdots \\
 & & & & 2 & 4 & \cdots \\
\hline
 & & & & & 2 & \cdots
\end{array}$$

驗算：

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} k x^k\right)(1 + 2x + 2x^2 + 2x + \cdots)$$
$$= (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots)(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots)$$
$$= x + (2+2)x^2 + (2+4+3)x^3 + (2+4+6+4)x^4 + \cdots$$
$$= x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$$

4. 冪級數的微分

設 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

若 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ 的收斂半徑是 R：

(1) 在 $(a-R, a+R)$ 上可逐項微分

(2) $\dfrac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ 且其收斂半徑為 ______

說例

在 $(-\infty,\infty)$ 上，$\dfrac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{kx^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$

5. 冪級數的積分

設 $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}$

若 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$ 的收斂半徑是 R：

(1) 在 $(a-R,a+R)$ 上可逐項積分

(2) $\int\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}+C$ 且其收斂半徑為 ______

說例

在 $(-\infty,\infty)$ 上，$\int\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k!(k+1)}+C=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}+C$

例題 1. (精選範例 18-1)

Express $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ as $\sum_k a_k x^k$ and find the radius of convergence.

解

例題 2. (精選範例 18-2)

Express the following functions as $\sum_{k} a_k x^k$ and find the interval of convergence.

(1) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (2) $\tan^{-1} x$

解

例題 3. (精選範例 18-3)

Express the following functions as $\sum_{k} a_k x^k$ and find the interval of convergence.

(1) $\ln(1-x)$ (2) $\ln(1+x)$ (3) $\ln(\frac{1+x}{1-x})$

解

例題 4. (精選範例 18-4)

Let $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

Express $f'(x)$ and $f''(x)$ as $\sum_{k} a_k x^k$ and find the interval of convergence.

解

重點十九 泰勒級數與泰勒定理

1. 泰勒級數（Taylor series）與泰勒多項式（Taylor polynomial）：

(1) 若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k$，$|x-a|<R$，則 $a_k=$ ______

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分無限多次，

則定義 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒級數為 ______

(3) $f(x)$ 在 ______ 的泰勒級數又稱為馬克勞林級數（Maclaurin series）

(4) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 最多僅能微分 N 次，

則對任意 $1\le n\le N$

可定義 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 階泰勒多項式為 ______

說明

Proof of (1):

$\because f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots$

$\therefore f(a)=a_0$ and $f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3\cdots$

$\Rightarrow f'(a)=a_1$ and $f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2\cdots$

$\Rightarrow f''(a)=2a_2$ and $f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2+\cdots$

$\Rightarrow f'''(a)=2\cdot 3a_3$ and $f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4a_4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6a_6(x-a)^2+\cdots$

$\vdots$

Continue this process, we have $f^{(k)}(a)=k!a_k$ and thus $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ Q.E.D.

2. 泰勒定理：

設 $f(x)$ 在 $x=a\in I$（I 是一個區間）上可微分 $n+1$ 次

則對任意 $x\in I$ 均有 $f(x)=$ ______，其中

(1) $P_n(x)=$ ______ 即 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 階泰勒多項式

(2) $R_n(x)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 階餘項，其表達式有以下兩種：

① $R_n(x)=$ ______，其中 ξ 介在 a 和 x 之間

② $R_n(x)=$ ______

(3) 設 $f(x)$ 在 $[a-r,a+r]$ 上 n 次連續可微，且在 $(a-r,a+r)$ 上 $n+1$ 次可微

若存在正數 M_n 使得在 $(a-r,a+r)$ 均有 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_n$

則對任意 $x\in(a-r,a+r)$ 均有 $|R_n(x)|\le$ ______________ $\le$ ______________

說明

By the fundamental theorem of Calculus,

we have $\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a)$

$\Rightarrow\ f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$

Applying integration by part on $\int_a^x f'(t)dt$,

we have $\int_a^x f'(t)dt=(t-x)f'(t)\Big|_a^x-\int_a^x(t-x)f''(t)dt=(x-a)f'(a)+\int_a^x(x-t)f''(t)dt$

$\Rightarrow\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x(x-t)f''(t)dt$

Again, applying integration by part on $\int_a^x(x-t)f''(t)dt$,

$$\text{we have }\int_a^x(x-t)f''(t)dt=-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\Big|_a^x-\int_a^x-\frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)dt$$

$$=\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)dt$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)dt$$

$\vdots$

Continuous this process,

$$\text{we have }f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$=P_n(x)+R_n(x)$$

$$\text{where }P_n(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$\text{and }R_n(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Next, applying the mean value theorem for integral on $\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$, we have $\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$, where ξ is between a and x

Note that $\int_a^x (x-t)^n dt = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$,

$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Finally, if $f(x)\in C^n[a-r,a+r]$, $f^{(n+1)}(x)$ exists on $(a-r,a+r)$,
and there is a positive number M_n such that $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_n$ on $(a-r,a+r)$,

then, on $(a-r,a+r)$, $\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$ (note that ξ is between x and a)

$$\le \frac{M_n}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1} \le \frac{M_n}{(n+1)!}r^{n+1} \quad \text{Q.E.D.}$$

例題 1.

Find the Taylor series of e^x about $x=0$. (That is, the Maclaurin series of e^x.)

解

例題 2.　(精選範例 19-1)

Find the Taylor series of $\sin x$ about $x=0$. (That is, the Maclaurin series of $\sin x$.)

解

例題 3.　(精選範例 19-2)

Find the Taylor series of $\cos x$ about $x=0$. (That is, the Maclaurin series of $\cos x$.)

解

例題 4. (精選範例 19-3)

Find the Taylor series of $e^x \sin x$ about $x=0$. (That is, the Maclaurin series of $e^x \sin x$.)

解

例題 5. (精選範例 19-4)

Find the Taylor series of $\tan x$ about $x=0$. (That is, the Maclaurin series of $\tan x$.)

解

例題 6. (精選範例 19-5)

Find the first three terms of the Taylor series of $\sqrt{x}$ about $x = 4$.

解

例題 7. (精選範例 19-6)

Let $f(x) = \cos^2 x$, find $f^{(2021)}(0)$

解

例題 8. (精選範例 19-7)

Estimate e by using Taylor series so that the error is less than 10^{-6}.

解

例題 9. (精選範例 19-8)

Use 2nd order Taylor polynomial about $a=8$ to approximate $\sqrt[3]{x}$ and estimate the error on $[7,9]$.

解