第二章 多變數函數的微積分

- 更多的變數，更多的方向

重點一 多變數函數

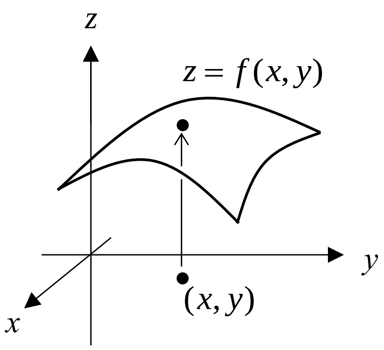
1. 多變數函數的定義

(1) 型如 $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ 的函數稱為多變數函數 (function of several variables)

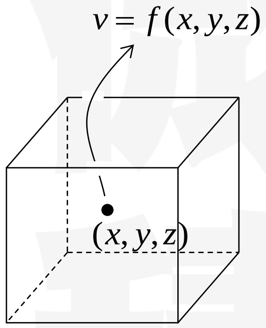
(2) $z = f(x, y)$ 是一個二變數函數，其函數值的意義可想像成在平面上任一點的高度，故其函數圖形構成一個曲面

(3) $v = f(x, y, z)$ 是一個三變數函數，其函數值意義可想像成在一立體範圍上任一點的溫度

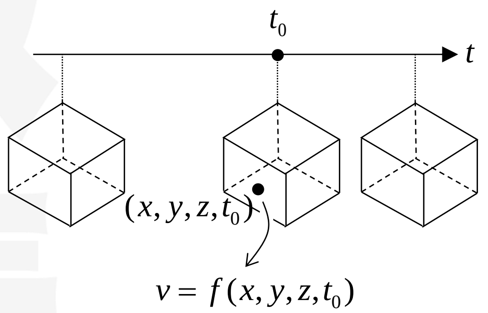
(4) $v = f(x, y, z, t)$ 是一個四變數函數，其函數值意義可想像成在一時空範圍上任一點所對應到的數值，如在地球上某一點某一瞬間的溫度



二變數函數圖形



三變數函數示意圖

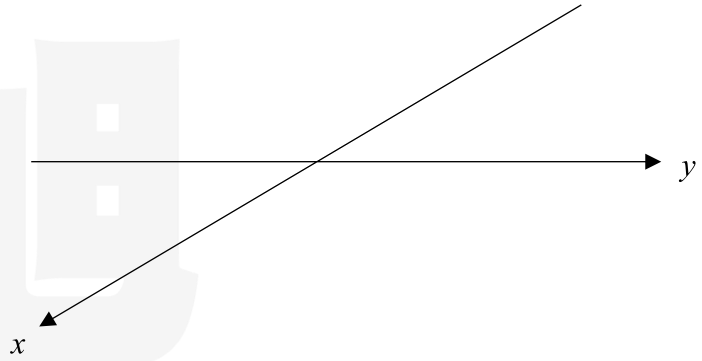


四變數函數示意圖

例題 1.

Sketch the graph of $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ for $x^2+y^2\le 1$.

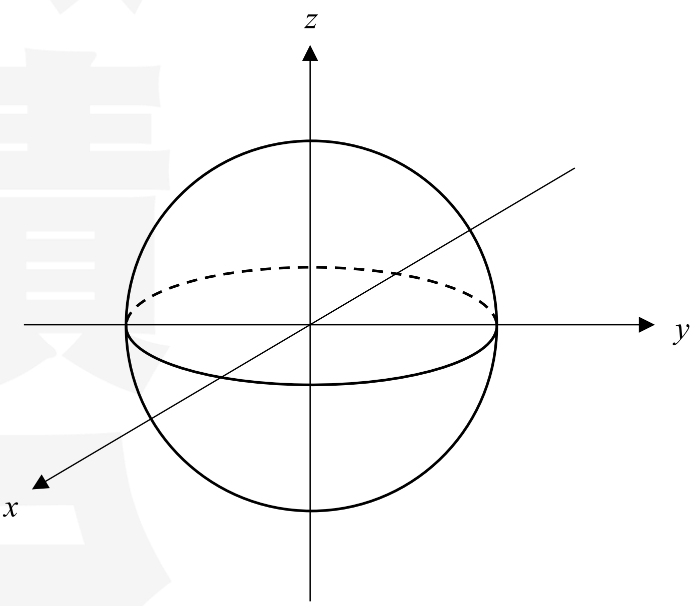
解



例題 2. (精選範例 1-1)

Suppose that there is a sphere centered at the origin of radius r cm. If the temperature of the center is $100°C$, and the temperature drops $5°C$ per $\frac{r}{10}$ cm from the origin. Find the temperature at $(\frac{r}{2},\frac{r}{2},\frac{r}{2})$.

解



重點二 二變數函數的極限

1. 二變數函數極限的直觀觀念

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \iff$ 在座標平面上 (x,y) 以 ______________ 逼近 (a,b) 時，$f(x,y)$ 會逼近 L

(2) 當極限存在時，不論 (x,y) 由哪條路徑逼近 (a,b)，$f(x,y)$ 都會逼近同一個 L

(3) 反過來說，若 (x,y) 經由某兩條路徑逼近 (a,b) 時，$f(x,y)$ 逼近不同實數的話，就表示 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 不存在

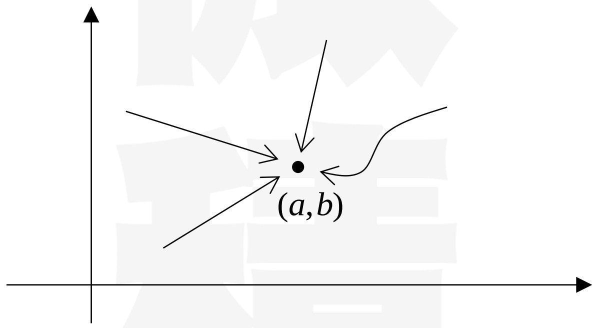
說例

設 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

當 (x,y) 沿著 $y=0$ 逼近 $(0,0)$ 時，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2}=1$

當 (x,y) 沿著 $x=0$ 逼近 $(0,0)$ 時，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \dfrac{-y^2}{y^2}=-1$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在



2. 二變數函數極限的嚴格定義

(1) 複習：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ such that, if $0<|x-a|<\delta$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

$\iff$ ____

例題 1.

Show that $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ by definition.

解

例題 2. **(精選範例 2-1)**

Show that $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x+y^2) = 6$ by definition.

解

例題 3. (精選範例 2-2)

Determine whether $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x+\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ exists or not. If it exists, find it.

解

例題 4. (精選範例 2-3)

Determine whether $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ exists or not. If it exists, find it.

解

例題 5. (精選範例 2-4)

Determine whether $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ exists or not. If it exists, find it.

解

例題 6. (精選範例 2-5)

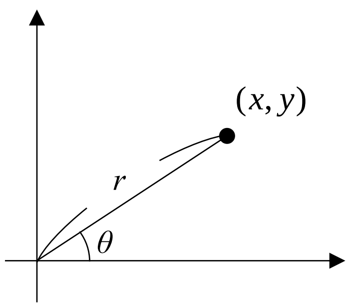
Determine whether $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ exists or not. If it exists, find it.

解

重點三 二變數函數極限特殊求法

1. 化極座標求極限

(1) 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，則 $\begin{cases} r = \underline{\qquad\qquad} \\ \tan\theta = \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$



(2) 令極座標以後，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(r,\theta)\to(\gamma,\alpha)} f(r,\theta)$，故若後者極限存在則前者極限也存在，且兩者極限相等；若後者極限不存在則前者極限也不存在

(3) 原點沒有極座標，但極限可趨近原點，只要路徑避開原點即可；另外，令極座標以後，$(x,y)\to(0,0)$ 等價於 $r\to 0$

說例

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，則 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$

2. 變數分離題型求極限

若 $f(x,y)$ 可變數分離成每一項僅有單一變數，則可當成單變數極限問題運算

說例

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (2x+y^2) = \lim\limits_{x\to 1}(2x) + \lim\limits_{y\to 2} y^2 = 2+4 = 6$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(3,1)} (3xy-2x+3y-2) &= \lim_{(x,y)\to(3,1)} (x+1)(3y-2) \\ &= \left[\lim_{x\to 3}(x+1)\right]\left[\lim_{x\to 1}(3y-2)\right] \\ &= 4\cdot 1 = 4\end{aligned}$$

[另解]

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(3,1)} (3xy-2x+3y-2) &= 3(\lim_{x\to 3} x)(\lim_{y\to 1} y) - 2(\lim_{x\to 3} x) + 3(\lim_{y\to 1} y) - 2 \\ &= 3\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 3 + 3\cdot 1 - 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

3. 夾擠定理求極限

說例

求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin(x+y)$ 時

因 $0 \le |x\sin(x+y)| \le |x|$ 且 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x\sin(x+y)| = 0$ 從而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin(x+y) = 0$

4. 利用 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 求極限

說例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1$$

5. 去零因子求極限

說例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = (\lim_{x\to 0} x) + (\lim_{y\to 0} y) = 0+0=0$$

例題 1. (精選範例 3-1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

解

例題 2. (精選範例 3-2)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\ln\sqrt{x^2+y^2}=?$

解

例題 3. (精選範例 3-3)

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (2x^2y^3+3x^3y^2+3x+2y)=?$

解

例題 4. (精選範例 3-4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x+y)}{2x^2+2x+xy+y} = ?$$

解

例題 5. (精選範例 3-5)

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [x+y] = ?$ $[x]$ is the largest integer that is less than or equal to x .

解

例題 6. (精選範例 3-6)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = ?$$

解

重點四 二變數函數極限運算定理

1. 四則運算

設 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$，$c\in\mathbb{R}$，則：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [c\cdot f(x,y)]=$ ____________________

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)+g(x,y)]=$ ____________________

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)\cdot g(x,y)]=$ ____________________

(4) 若 __________，則 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L}{M}$

2. 合成運算

設 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ 且 ____________________

則：$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y))=g(L)$

例題 1.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2+y^2}=?$

解

重點五 二變數函數的連續

1. 二變數函數連續的定義

(1) 複習：$f(x)$ 在 $x=a$ 上連續 $\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ f(a) \text{ 存在} \\ ② \ \lim_{x\to a} f(x) \text{ 存在} \\ ③ \ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

(2) $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上連續 $\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ f(a,b) \text{ 存在} \\ ② \ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \text{ 存在} \\ ③ \ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$

2. 二變數連續函數的運算定理

(1) 四則運算：

設 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 均在 $(x,y)=(a,b)$ 上連續，$c\in\mathbb{R}$，則：

① $c\cdot f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上必連續

② $f(x,y)+g(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上必連續

③ $f(x,y)\cdot g(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上必連續

④ 若 $g(a,b)\neq 0$，則 $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上必連續

(2) 合成運算：

設 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 連續且 $g(t)$ 在 $t=f(a,b)$ 上連續

則 $g(f(x,y))$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 上連續

例題 1.

Find $a \in \mathbb{R}$ so that $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{xy} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{, if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ is continuous everywhere.

解

例題 2. (精選範例 5-1)

Find $a \in \mathbb{R}$ so that $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{, if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ is continuous everywhere.

解

重點六 二變數函數的偏微分

1. 二變數函數偏微分的定義：

(1) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=L\in\mathbb{R}$，則：

① 稱 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 可對 x 偏微分

② 記此 $L=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$

(2) 若 $\dfrac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad}=L\in\mathbb{R}$，則：

① 稱 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 可對 y 偏微分

② 記此 $L=$ ______ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$

說例

令 $f(x,y)=e^x\sin y$

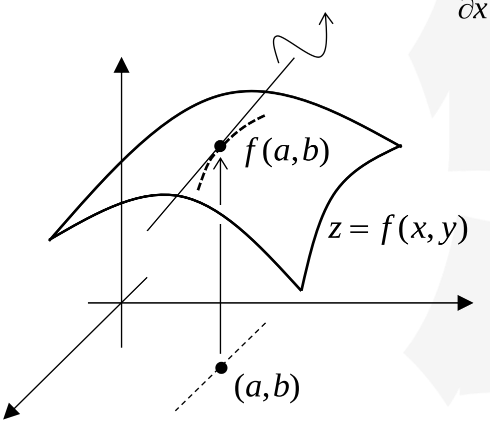
$\because \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h\sin 0-e^0\sin 0}{h}=0$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

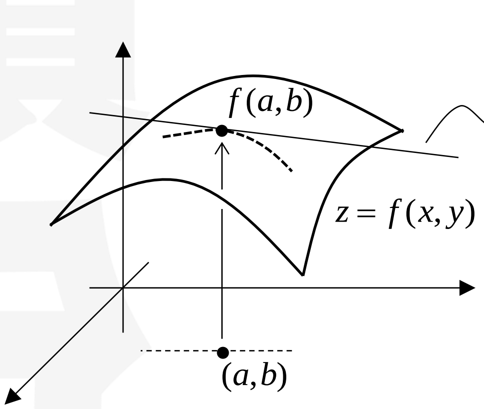
$\because \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^0\sin k-e^0\sin 0}{k}=1$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$

此切線的「斜率」即為 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$



此切線的「斜率」即為 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$



2. 二變數函數的偏導函數：

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

說例

$$\frac{\partial}{\partial x}e^x\sin y=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}\sin y-e^x\sin y}{h}=(\sin y)\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\sin y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}e^x\sin y=\lim_{k\to 0}\frac{e^x\sin(y+k)-e^x\sin y}{k}=(e^x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(y+k)-\sin y}{k}=e^x\cos y$$

(3) 計算 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 時，可將與 y 相關的項視為常數，然後對 x 微分

(4) 計算 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 時，可將與 ____ 相關的項視為常數，然後對 ____ 微分

3. 多變數函數的偏導函數：

說例

$$\frac{\partial}{\partial x}xe^y\sin z=e^y\sin z$$

$$\frac{\partial}{\partial y}xe^y\sin z=xe^y\sin z$$

$$\frac{\partial}{\partial z}xe^y\sin z=xe^y\cos z$$

4. 二變數函數偏微分的等價計算式：

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=$ ________________

例題 1. (精選範例 6-1)

Let $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{y+e^{x}}$, find $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

解

例題 2. (精選範例 6-2)

Let $f(x,y)=x^{2}y$, calculate $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ by definition, and then check it by getting $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ first.

解

例題 3.　(精選範例 6-3)

Let $f(x,y)=\int_x^y e^{-t^2}dt$, find $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

解

例題 4.　(精選範例 6-4)

Let $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, find $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, and check the continuity of the function at the origin.

解

重點七 高階偏微分

1. 高階偏微分運算法則：

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ ； $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ ____________

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ ； $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=$ _____________

(3) 方便起見，有時會簡寫微分符號：

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\partial_x f$ 、 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\partial_y f$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\partial_{xx} f$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\partial_{yy} f$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\partial_{xy} f$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\partial_{yx} f$

或者

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x$ 、 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_y$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}$ 、 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=$ ______

說例

① $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y\sin x=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial}{\partial x}y\sin x)=\dfrac{\partial}{\partial x}(y\cos x)=-y\sin x$

② $\partial_{xyx}e^x(2y+5)=\partial_x\{\partial_y[\partial_x e^x(2y+5)]\}=\partial_x[\partial_y e^x(2y+5)]=\partial_x(2e^x)=2e^x$

③ 設 $f(x,y,z)=xe^y\sin z$ ，

則 $f_{xyz}=\partial_z[\partial_y(\partial_x xe^y\sin z)]=\partial_z(\partial_y e^y\sin z)=\partial_z(e^y\sin z)=e^y\cos z$

2. 偏微分次序不一定能交換：

說例

設 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, if } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時，

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時

$$f_x(x,y)=f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}}{h}=0$$

$$f_y(x,y)=f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k}=0$$

故 $f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

且 $f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{, if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

故 $f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\dfrac{\frac{-k^5}{k^4}-0}{k}=-1$

且 $f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{k\to 0}\dfrac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$

因此，此例中， $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

◎ 何時 $f_{xy}=f_{yx}$？

Ans：當 f, f_x, f_y, f_{xy} 和 f_{yx} 均連續時，則 $f_{xy}=f_{yx}$

例題 1. (精選範例 7-1)

Let $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, find $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$.

解

例題 2. (精選範例 7-2)

Let $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y+z}$, find $f_{xyxz}(1,1,1)$.

解

重點八 偏微分運算律

1. 四則運算：(僅列出對 x 偏微，對其他變數偏微亦然)

(1) $(cf)_x = cf_x$，其中 c 為常數

(2) $(f+g)_x = f_x + g_x$

(3) $(f\cdot g)_x = f_x g + g_x f$

(4) 當 $g\neq 0$ 時，$(\frac{f}{g})_x = \frac{f_x g - g_x f}{g^2}$

2. 合成運算 (連鎖律)：

(1) 設 $z=f(x,y)$，其中 $x=x(t)$ 且 $y=y(t)$，則：

① $z=z(t)=f(x(t),y(t))$

② $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}$

說例

設 $f(x,y)=2x+y^2$，其中 $x=x(t)=\sin t$ 且 $y=y(t)=e^t$

則 $f(x(t),y(t))=2(\sin t)+(e^t)^2=2\sin t+e^{2t}$

$\Rightarrow \frac{df}{dt}=2\cos t+2e^{2t}$

而由連鎖律：$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(2)(\cos t)+(2y)(e^t)=2\cos t+2e^{2t}$

(2) 設 $v=f(x,y,z)$，其中 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 且 $z=z(t)$，則：

① $v=v(t)=f(x(t),y(t),z(t))$

② $\frac{dv}{dt}=$ ____________________ $=\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

(3) 設 $z=f(x,y)$，其中 $x=x(s,t)$ 且 $y=y(s,t)$，則：

① $z=z(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$

② $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}$

③ $\dfrac{\partial z}{\partial t}=$ ______________________

④ $$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

說例

設 $f(x,y)=x+y$，其中 $x=x(s,t)=e^s\sin t$ 且 $y=y(s,t)=t\ln s$

則 $f(x(s,t),y(s,t))=e^s\sin t+t\ln s$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=e^s\sin t+\dfrac{t}{s}\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}=e^s\cos t+\ln s\end{cases}$$

而由連鎖律：$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}=(1)(e^s\sin t)+(1)(t\cdot\dfrac{1}{s})=e^s\sin t+\dfrac{t}{s}\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}=(1)(e^s\cos t)+(1)(\ln s)=e^s\cos t+\ln s\end{cases}$$

(4) 設 $v=f(x,y,z)$，其中 $x=x(s,t)$、$y=y(s,t)$ 且 $z=z(s,t)$，則：

① $v=v(s,t)=f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$

② $\dfrac{\partial v}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial s}$

③ $\dfrac{\partial v}{\partial t}=$ ____________________________________

④ $$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \qquad\qquad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

(5) 設 $z=f(x,y)$，其中 $x=x(s,t)$ 且 $y=y(t)$ 則：

① $z=z(s,t)=f(x(s,t),y(t))$

② $\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}$

③ $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{ds}$

④ $$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ 0 & \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

說例

設 $f(x,y)=x^2+3y$，其中 $x=x(s,t)=e^s\sin t$ 且 $y=y(t)=\ln t$

則 $f(x(s,t),y(t))=(e^s\sin t)^2+3(\ln t)=e^{2s}\sin^2 t+3\ln t$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=2e^{2s}\sin^2 t\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}=2e^{2s}(\sin t)(\cos t)+\dfrac{3}{t}=e^{2s}\sin(2t)+\dfrac{3}{t}\end{cases}$$

而由連鎖律：$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}=(2x)(e^s\sin t)=2e^{2s}\sin^2 t\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=(2x)(e^s\cos t)+(3)(\dfrac{1}{t})=2e^{2s}\sin(2t)+\dfrac{3}{t}\end{cases}$

(6) 設 $z=f(x,y)$，其中 $x=x(s,t)$ 且 $y=y(t,u)$ 則：

① $z=z(s,t,u)=f(x(s,t),y(t,u))$

② $\dfrac{\partial z}{\partial s}=$ ______________________________

③ $\dfrac{\partial z}{\partial t}=$ ______________________________

④ $\dfrac{\partial z}{\partial u}=$ ______________________________

⑤ $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

3. 多變數向量值函數的微分與連鎖律：

(1) 設 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m)$，則：

① 對任意 $1 \le k \le m$，$y_k = y_k(x_1, x_2, ..., x_n)$

② $Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ 稱為 f 的導函數 (derivative)

③ 對任意 $1 \le k \le m$，$Dy_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

④ $Df = \begin{pmatrix} Dy_1 \\ Dy_2 \\ \vdots \\ Dy_m \end{pmatrix}$

說例

設 $f(x, y, z) = (3x + y, e^x \sin z)$

則 $Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \end{pmatrix}$

(2) 若 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ 可微且 $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ 在 $f(\mathbf{x})$ 可微，則：

① $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 在 $\mathbf{x}$ 可微

② $D(g \circ f) = Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})$

說例

設 $f(x,y,z)=3xyz$，其中 $x=3s+t$、$y=t\sin u$ 且 $z=2u^2+1$

則 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

令 $g(s,t,u)=(3s+t,t\sin u,2u^2+1)=(g_1(s,t,u),g_2(s,t,u),g_3(s,t,u))$

則 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

且 $f(x,y,z)=f(g(s,t,u))=(f\circ g)(s,t,u)$

$$\Rightarrow\ D(f\circ g)=Df(g(s,t,u))Dg(s,t,u)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} & \frac{\partial g_1}{\partial u}\\ \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} & \frac{\partial g_2}{\partial u}\\ \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} & \frac{\partial g_3}{\partial u}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3yz & 3xz & 3xy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & \sin u & t\cos u\\ 0 & 0 & 4u\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9yz & 3yz+3xz\sin u & 3xzt\cos u+12xzu\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9(t\sin u)(2u^2+1)\\ 3(t\sin u)(2u^2+1)+3(3s+t)(2u^2+1)\sin u\\ 3(3s+t)(2u^2+1)t\cos u+12(3s+t)(2u^2+1)u\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}9t(\sin u)(2u^2+1)\\ 3(\sin u)(2t+3s)(2u^2+1)\\ 2(t\cos u+4u)(3s+t)(2u^2+1)\end{pmatrix}^T$$

又 $D(f\circ g)=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial s} & \frac{\partial(f\circ g)}{\partial t} & \frac{\partial(f\circ g)}{\partial u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial s}\\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial t}\\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial u}\end{pmatrix}^T$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial s}=9t(\sin u)(2u^2+1)\\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial t}=3(\sin u)(2t+3s)(2u^2+1)\\ \frac{\partial(f\circ g)}{\partial u}=2(t\cos u+4u)(3s+t)(2u^2+1)\end{cases}$$

例題 1. (精選範例 8-1)

Let $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, where $x=t+2s$, $y=s^2+\sin t$ and $z=e^{2t}$. Find $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

解

例題 2. (精選範例 8-2)

Let $z=e^{x^2}\cos y$, where $x=u+2v$, $y=v-2u$. Find $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ and $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ at $(u,v)=(1,0)$.

解

例題 3.　(精選範例 8-3)

Suppose that $u=u(x,y)$ and $u_{xx}+u_{yy}=0$. Let $x=r\cos\theta$ and $y=r\sin\theta$, write the equation in terms of u_r, u_θ, u_{rr} and $u_{\theta\theta}$.

解

例題 4. (精選範例 8-4)

Suppose that $u = u(x, y, z)$ and $v = v(x, y, z)$, and $\begin{cases} u^3 + v^3 + x^3 - 3y = 0 \\ u^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0 \end{cases}$. Find $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解

例題 5. (精選範例 8-5)

Suppose that z, u and v are functions of (x, y), and $\begin{cases} z = uv \\ u^2 - v + x = 0 \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$. Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

重點九 多變數函數的微分量 (全微分)

1. 多變數函數的微分量

(1) 複習：若 $y=f(x)$，則：

① $dy=f'(x)dx$

② dy 稱為微分量 (或全微分) (total differential or total derivative)

③ 微分量可用來估計函數值，

$$f(x_0+dx)\approx f(x_0)+dy\big|_{x=x_0}=f(x_0)+f'(x_0)dx$$

說例

設 $y=f(x)=\sqrt{x}$

則 $dy=f'(x)dx=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\Rightarrow\ \sqrt{25.01}\approx\sqrt{25}+dy\big|_{x=25}=\sqrt{25}+\frac{1}{\sqrt{25}}\cdot 0.01=5.002$$

(2) 若 $z=f(x,y)$，則：

① $dz=f_x dx+f_y dy$

② dz 稱為微分量 (或全微分)

③ 微分量可用來估計函數值，

$$\begin{aligned}f(x_0+dx,y_0+dy)&\approx f(x_0,y_0)+dz\big|_{x=x_0}\\&=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy\end{aligned}$$

說例

設 $z=\sqrt{x+y}$

則 $dz=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}dx+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}dy$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \sqrt{25.0101}&=\sqrt{(25+0.01)+(0+0.0001)}\\&\approx\sqrt{25+0}+dz\big|_{(x,y)=(25,0)}\\&=\sqrt{25}+\frac{1}{\sqrt{25}}\cdot 0.01+\frac{1}{\sqrt{25}}\cdot 0.0001\\&=5.00202\end{aligned}$$

(3) 若 $v=f(x,y,z)$，則：

① $dv =$ ________________

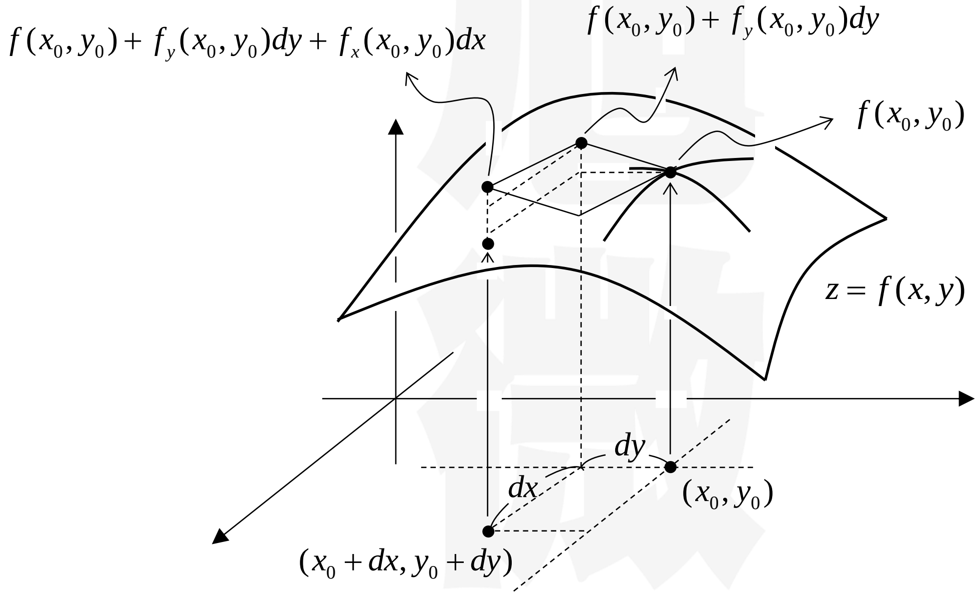
② dv 稱為微分量 (或全微分)

③ 微分量可用來估計函數值，

$f(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz) \approx$ ________________

$=$ ________________________

2. 二變數函數微分量的幾何意義：



例題 1. (精選範例 9-1)

Find the linearization of $f(x,y)=xe^{xy}$ at $(1,0)$.

解

例題 2. (精選範例 9-2)

Let $u=\dfrac{e^x\tan y+z}{x+y}$, find the total differential of u.

解

例題 3. (精選範例 9-3)

Estimate $\sqrt[4]{16.2}\sqrt{24.98}$.

解

重點十 方向導數

1. 方向導數的定義：(以二變數函數為例)

設 $z=f(x,y)$，則：

(1) $D_{\vec{u}}f(a,b)$ 表 $f(x,y)$ 在 (a,b) 沿 $\vec{u}$ 方向所產生的切線的「斜率」

(2) $D_{\vec{u}}f(a,b)=$ ______________________，其中 (h,k) 是和 $\vec{u}$ 平行的單位向量

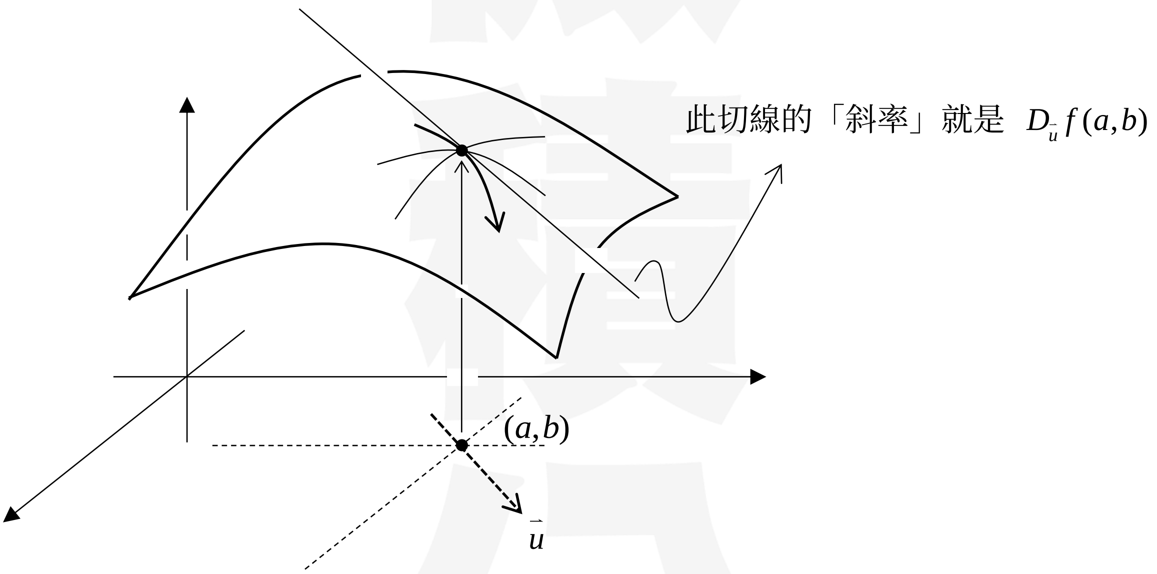
說例

設 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2+1}$，$\vec{u}=(1,2)$

則 $D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0+\frac{t}{\sqrt{5}},0+\frac{2t}{\sqrt{5}})-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\dfrac{\frac{t}{\sqrt{5}}}{\frac{4t^2}{5}+1}}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{5}}{4t^2+5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3) 不同的寫法：$D_{\vec{u}}f=\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$

2. 方向導數的幾何意義：(以二變數函數為例)



例題 1. (精選範例 10-1)

Find the directional derivative of $f(x,y)=x^2+xy$ at $(1,2)$ along $(1,1)$.

解

重點十一 梯度與等高線

1. 梯度 (gradient) 的定義：

(1) $f(x,y)$ 在 (a,b) 的梯度定為 $\nabla f(a,b)=(f_x(a,b),\,f_y(a,b))$

(2) $f(x,y,z)$ 在 (a,b,c) 的梯度定為 $\nabla f(a,b,c)=(f_x(a,b,c),\,f_y(a,b,c),\,f_z(a,b,c))$

(3) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 在 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的梯度定為

$\nabla f(\mathbf{a})=$ ______________________________

說例

設 $f(x,y)=x^2\sin y$，則 $\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)=(2x\sin y,x^2\cos y)$

2. 梯度 v.s. 多變數函數的導函數：

(1) $Df(x,y)=\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}$；$\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)$

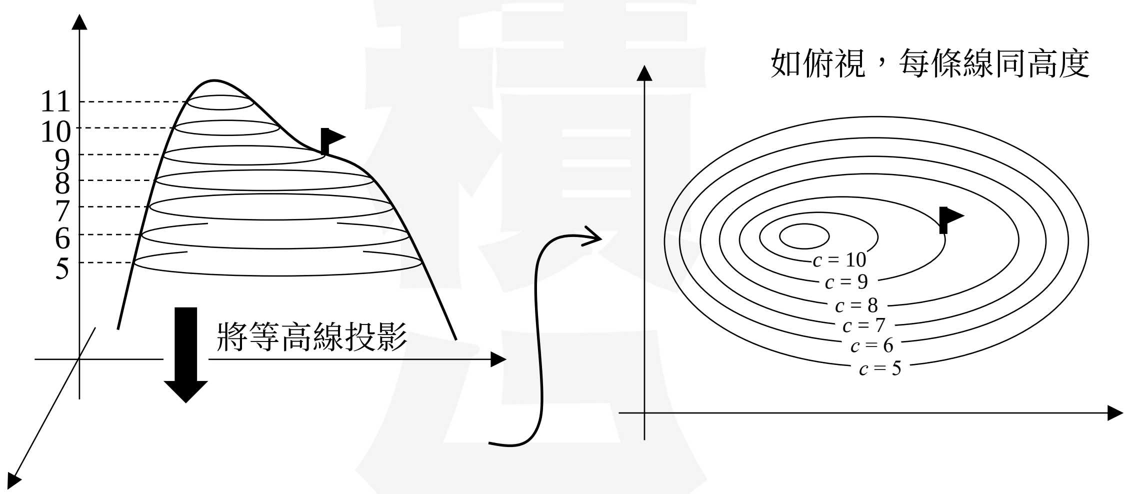
(2) $Df(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$；$\nabla f(x,y,z)=(f_x,f_y,f_z)$

(3) $Df(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_n} \end{pmatrix}$；$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(f_{x_1},f_{x_2},\ldots,f_{x_n})$

(4) 梯度和導函數的本質一樣，只是表達上一個為矩陣，另外一個為向量

3. 等高線與梯度的幾何意義：(以二變數函數為例)

(1) 針對 $z=f(x,y)$，固定一個實數 c，$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)=c\}$ 稱為 $f(x,y)$ 在高度為 c 的等高集 (level set)，若此集和恰為一曲線，則稱為等高線 (level curve)



(2) 梯度 $\nabla f(a,b)$ 是一個二維向量，將此向量起點放到 (a,b) 上以後，所指的方向會是在該點附近高度變化最大的方向，而該向量的長度就是 $z=f(x,y)$ 在

$(a,b,f(a,b))$ 上沿著高度變化最大方向的切線的「切線斜率」，意即，該向量的長度就是 $z=f(x,y)$ 在 (a,b) 上沿著高度變化最大方向的 ________________ 。事實上，$D_{\vec{u}}f=$ ____________________

說明

For any unit vector $\vec{u}=(h,k)$,

$$\because D_{\vec{u}}f=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th,y+tk)-f(x,y)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th,y+tk)-f(x,y+tk)+f(x,y+tk)-f(x,y)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+th,y+tk)-f(x,y+tk)}{th}\cdot h+\frac{f(x,y+tk)-f(x,y)}{tk}\cdot k\right]$$
$$=f_x\cdot h+f_y\cdot k$$
$$=(f_x,f_y)\cdot(h,k)$$
$$=\nabla f\cdot\vec{u}$$
$$=|\nabla f|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\theta, \text{ where } \theta \text{ is the angle between } \nabla f \text{ and } \vec{u}$$
$$=|\nabla f|\cdot\cos\theta$$
$$\therefore |D_{\vec{u}}f|=|\nabla f|\cdot|\cos\theta|\le|\nabla f|$$

So $|\nabla f|$ is the maximum of $|D_{\vec{u}}f|$ for all unit vector $\vec{u}$

(3) 梯度的方向會 ________ 等高線的切線方向

說明

Let the level curve of $f(x,y)=c$ at (x,y) be parameterized by $g(t)=(x(t),y(t))$

Note that $(f\circ g)(t)=f(g(t))=f(x(t),y(t))=c$

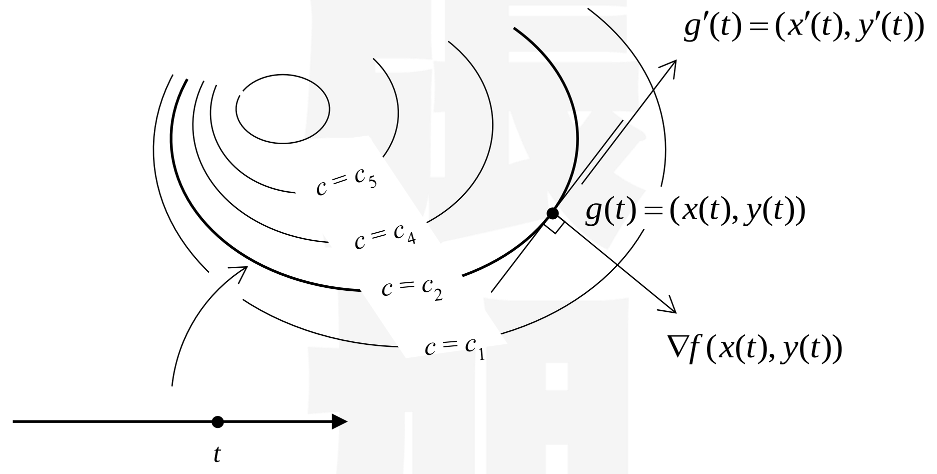
$\Rightarrow\ D(f\circ g)(t)=0$

$$\because D(f\circ g)(t)=Df(g(t))Dg(t)$$
$$=\begin{pmatrix} f_x(g(t)) & f_y(g(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t(t)\\ y_t(t)\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix} f_x(g(t)) & f_y(g(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t(t)\\ y_t(t)\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow\ (f_x,f_y)\cdot(x_t,y_t)=0$

$\Rightarrow\ \nabla f\cdot(x_t,y_t)=0$

$\Rightarrow\ \nabla f\perp(x_t,y_t)$



例題 1. (精選範例 11-1)

Let $f(x,y)=xe^y$.

(1) Find the directional derivative of $f(x,y)$ at $(2,0)$ along $(1,2)$.

(2) Find the direction of steepest ascent for $f(x,y)$ at $(2,0)$.

解

例題 2. (精選範例 11-2)

The derivative of $f(x,y)$ at $(1,2)$ in the direction $(1,1)$ is $2\sqrt{2}$ and in the direction $(0,-2)$ is -3. Find the derivative of $f(x,y)$ at $(1,2)$ in the direction $(-1,-2)$.

解

重點十二 等值面與切平面

1. 等值面與切平面

設 $v = f(x,y,z)$，則：

(1) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=c\}$ 稱為 $f(x,y,z)$ 在函數值等於 c 的一個等值集 (level set)，若該集合形成一個曲面，則稱其為等值面 (level surface)

(2) 梯度的方向會 ________ 等值面的的切平面

(3) $v = f(x,y,z)$ 在 (a,b,c) 的切平面方程式：________________________

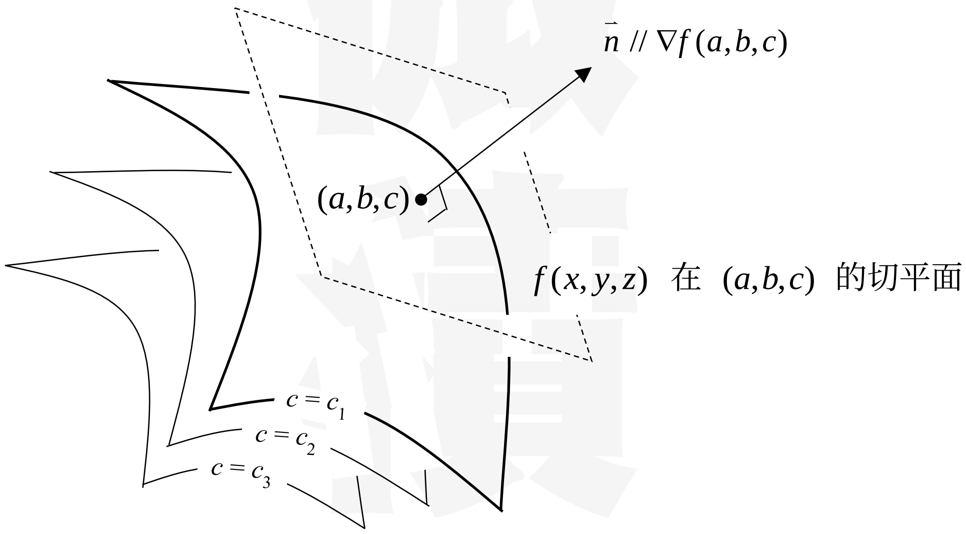
說明

Let $\vec{n}$ be a vector perpendicular to the level surface $f(x,y,z)=c$ with starting point (a,b,c)

$\Rightarrow$ $\nabla f(a,b,c) \perp \vec{n}$

$\Rightarrow$ the tangent plane is $\nabla f(a,b,c)(x-a, y-b, z-c)=0$

or, equivalently, $\ell x + my + nz = \ell a + mb + nc$, where $(\ell, m, n) = \nabla f(a,b,c)$



例題 1.

Let $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, find the tangent plane to $f(x,y,z)=1$ at $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

解

例題 2. (精選範例 12-1)

Find the tangent plane to $x^2+4y^2-z^2=4$ parallel to $2x+2y+z=5$

解

例題 3. (精選範例 12-2)

Let $f(x,y,z)=xe^{y}+\sin z$, find the normal vector to $f(x,y,z)=1$ at $(1,0,0)$.

解

例題 4. (精選範例 12-3)

Find the normal line to $x^2+y^2+z-9=0$ passing trough $(1,2,4)$.

解

重點十三 相對極值、絕對極值和鞍點

1. 相對極值、絕對極值的定義：

(1) 若 $f(a,b)$ 比 (a,b) 附近的 $f(x,y)$ 大，則稱 $f(a,b)$ 為 ______________

(2) 若 $f(a,b)$ 比 (a,b) 附近的 $f(x,y)$ 小，則稱 $f(a,b)$ 為 ______________

(3) 若 $f(a,b)$ 比任何 $f(x,y)$ 大，則稱 $f(a,b)$ 為 ______________

(4) 若 $f(a,b)$ 比任何 $f(x,y)$ 大，則稱 $f(a,b)$ 為 ______________

(5) 相對極值會出現在定義域的 ________ 及 ________

(6) 所有相對極值中，最大者即為絕對極大值，最小者則為絕對極小值

2. 臨界點與鞍點：

(1) 若 ______________，則稱 (a,b) 為 $f(x,y)$ 的臨界點

(2) 若 (a,b) 為 $f(x,y)$ 的臨界點且 $f(a,b)$ 既不為相對極值，則稱 __________ 為鞍點

3. 二階導數判斷法求極值：

1° 解 (a,b) 滿足 ________________

2° 計算 $\Delta(a,b)=\det\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)\cdot f_{yx}(a,b)$

$\Delta=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ 稱為 $f(x,y)$ 的判別式或 Hessian，又可記作 Hf

3° 若 $f_{xx}(a,b)>0$ 且 $\Delta(a,b)>0$，則 $f(a,b)$ 為 ________________

若 $f_{xx}(a,b)<0$ 且 $\Delta(a,b)>0$，則 $f(a,b)$ 為 ________________

若 $\Delta(a,b)<0$，則 $(a,b,f(a,b))$ 為 ________________

若 $\Delta(a,b)=0$，則無法判斷

說例

設 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x+2y-4$

1° 令 $\nabla f(x,y)=(0,0)$

$\Rightarrow\ (2x-y+2,-x+2y+2)=(0,0)$

$\Rightarrow\ (x,y)=(-2,-2)$

2° $\Delta=\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=3$

$\Rightarrow\ \Delta(-2,-2)=3>0$

3° $\because f_{xx}(-2,-2)=2>0$ 且 $\Delta(-2,-2)>0$

$\therefore f(-2,-2)=-8$ 為相對極小值

4. 二階導數 v.s. 一階導數：

(1) $f(x,y)$ 的一階導數為 $Df=\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}$

(2) $f(x,y)$ 的二階導數為 $Hf=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(3) $f(x,y,z)$ 的一階導數為 $Df=\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$

(4) $f(x,y,z)$ 的二階導數為 $Hf=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

例題 1.

Let $f(x,y)=ye^{x}$, find $Hf(x,y)$.

解

例題 2. (精選範例 13-1)

Find the local maxima and local minima of $f(x,y)=(x^{2}+3y^{2})e^{1-x^{2}-y^{2}}$.

解

例題 3. (精選範例 13-2)

Find and classify all critical points of $f(x, y) = 16xy - x^4 - 2y^2$.

解

例題 4. (精選範例 13-3)

Find the absolute extrema of $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

解

重點十四 拉格朗日乘數法

1. 一個限制條件的拉格朗日乘數法：

欲求 $f(x,y)$ 之極值，但限制 $g(x,y)=0$

(1) 解題步驟：

1. 解 (a,b) 滿足 $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$
2. 比較所有 $f(a,b)$ 的大小即可求得極值

(2) 其中 λ 稱為拉格朗日乘數 (Lagrange multiplier)，在解題上只是一個橋梁，不一定要解出來

說明

如右圖所示

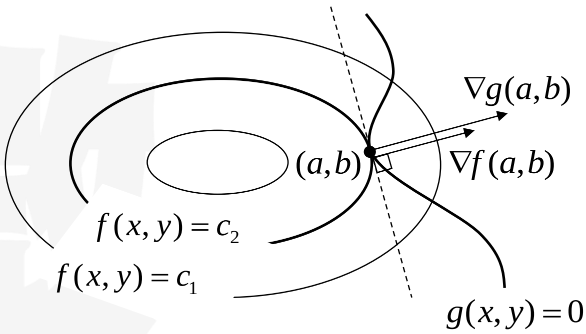
若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處能產生

極值 c_2，則此時 $g(x,y)=0$

必和 $f(x,y)=c_2$ 相切於 (a,b)

故此時 $\nabla f(a,b)\,//\,\nabla g(a,b)$

從而 $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$ Q.E.D.



2. 二個限制條件的拉格朗日乘數法：

欲求 $f(x,y)$ 之極值，但限制 $\begin{cases} g_1(x,y)=0 \\ g_2(x,y)=0 \end{cases}$

1. 解 (a,b) 滿足 ______________________
2. 比較所有 $f(a,b)$ 的大小即可求得極值

例題 1.

Find the maximum and minimum of $f(x,y,z)=x+y+z$ subject to the constrain $x^2+y^2+z^2=1$.

解

例題 2. (精選範例 14-1)

Let L be the intersection of $x+y+2z=2$ and $x^2+y^2=z$. Find the shortest distance from the origin to L.

解

例題 3. (精選範例 14-2)

Find the maximum and minimum of x^2+2y^2-2x+3 on $x^2+y^2\le 10$.

解

重點十五 二變數函數的積分：二重積分

1. 積分區域為矩形的二重積分

設 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$

(1) $\iint_R f(x,y)dA$ 表 $f(x,y)$ 在 R 上的「曲面下體積」

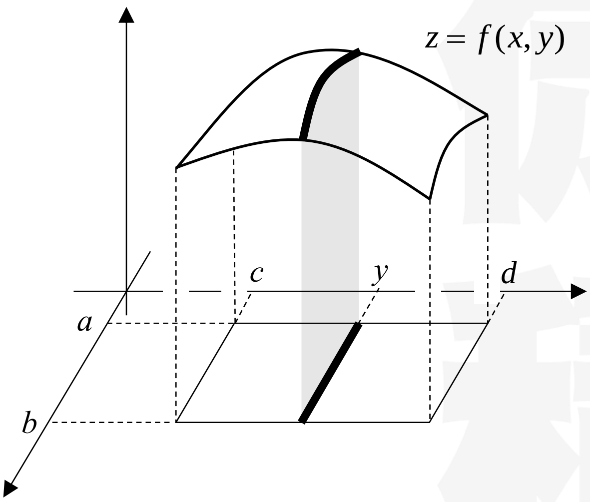
(2) 曲面若在 xy 平面的上方，則曲面下體積為正；反之為負

(3) 若 $f(x,y)$ 為 ＿＿＿＿＿＿＿＿，

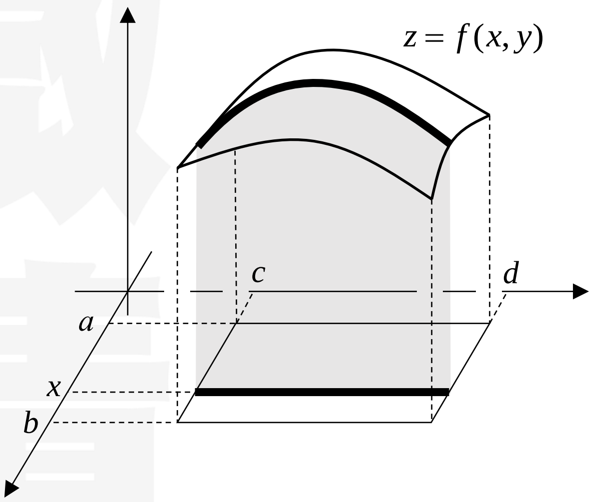
則 $\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$

此為富比尼定理 (Fubini's theorem)

(4) $\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$ 就是先固定 y 計算 $\int_a^b f(x,y)dx$，然後在把所有 $y\in[c,d]$ 的積分值再積分起來；同理可自行思考 $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$ 在計算上的意義



$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$



$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$

2. 積分區域不為矩形的二重積分

(1) 設 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

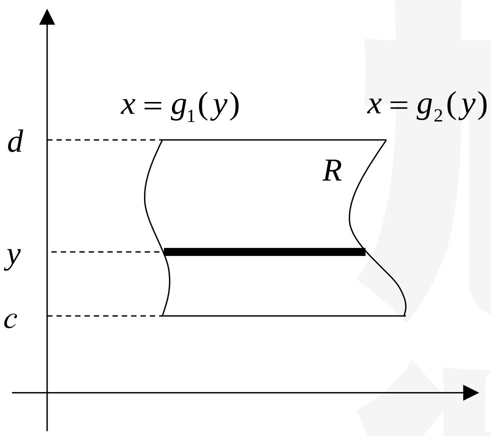
若 $f(x,y)$ 在 R 上連續且 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均在 $[a,b]$ 上連續，

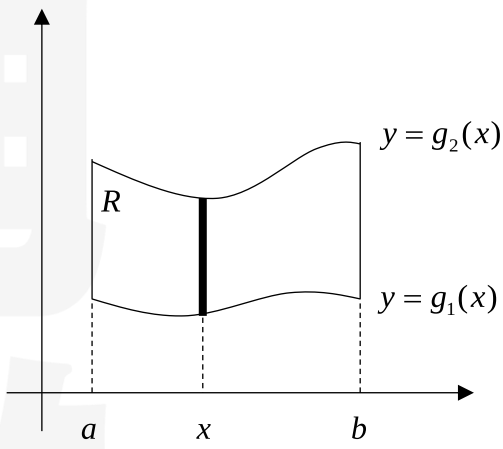
則 $\iint_R f(x,y)dA=$ ____________________

(2) 設 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g_1(y)\le x\le g_2(y), c\le y\le d\}$

若 $f(x,y)$ 在 R 上連續且 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 均在 $[c,d]$ 上連續，

則 $\iint_R f(x,y)dA=$ ____________________





例題 1.

Calculate $\iint_R 16-x^2-2y^2 dA$, where $R=[2,1]\times[1,2]$.

解

例題 2. (精選範例 15-1)

Calculate $\int_0^1\int_0^{1-y} x^2 dxdy$ and $\int_0^1\int_x^1 e^x \sin y dydx$.

解

例題 3.　(精選範例 15-2)

Calculate $\iint_R x^2 y dA$, where R is the region bounded by $y=2-x^2$ and $y=x$ with $x\ge 0$.

解

例題 4. (精選範例 15-3)

Calculate $\iint_R e^{\sin x \cos y} dA$, where R is the circle of radius 2 centered at the origin.

解

例題 5.　(精選範例 15-4)

Find the volume of a pyramid with base sides 10 cm and altitude 18 cm by double integral.

解

例題 6. (精選範例 15-5)

Change the order of integration and calculate it: $\int_0^1 \int_0^{\tan^{-1} x} dy dx$.

解

例題 7. (精選範例 15-6)

Calculate $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}dxdy$.

解

重點十六 二重積分的座標轉換

1. 二重積分的極座標轉換：

(1) 設 $R=\{[r,\theta]\in\mathbb{R}^2 \mid 0<a\le r\le b,\alpha\le\theta\le\beta\}$

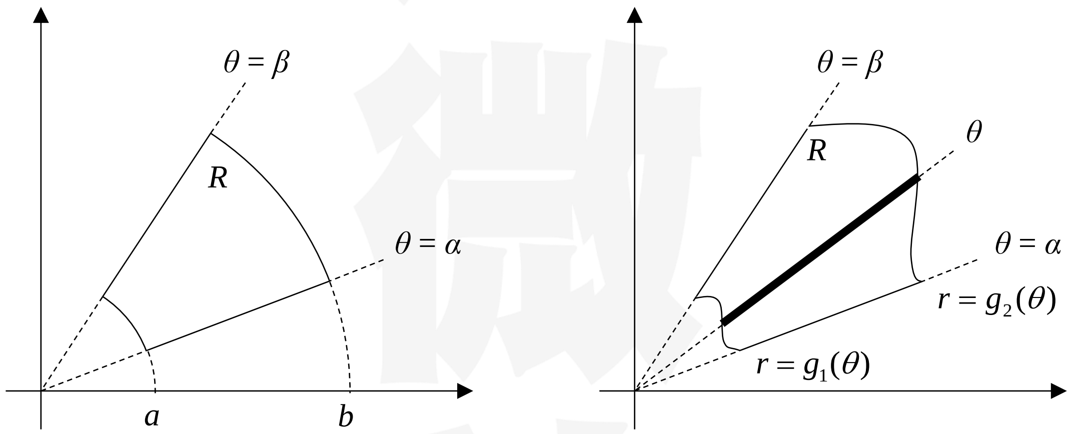
若 $f(x,y)$ 在 R 上連續，

則 $\iint_R f(x,y)dA=$ ________________

(2) 設 $R=\{[r,\theta]\in\mathbb{R}^2 \mid 0<g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$

若 $f(x,y)$ 在 R 上連續且 $g_1(\theta)$ 和 $g_2(\theta)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上連續，

則 $\iint_R f(x,y)dA=$ ________________



2. 雅克比矩陣：

(1) 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta=x(r,\theta) \\ y=r\sin\theta=y(r,\theta) \end{cases}$

則定義 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

此矩陣稱為上述變換的雅克比矩陣 (Jacobian matrix)

(2) dA 表積分區域的其中一小塊區域

① 直角坐標下，$dA=dxdy=dydx$

② 極座標下，$dA=$ ________

③ 故 $dxdy=rdrd\theta=\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)\right|drd\theta$

④ 記憶：________

(3) 令 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$

則 $dxdy=\left|\det\left(\quad\quad\right)\right|dudv$

說例

令 $\begin{cases}x=2u-v\\y=u-v\end{cases}$

則 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ dxdy=\left|\det\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\right|dudv=dudv$

例題 1.

Calculate $\iint_R 3x+4y\,dA$, where R is region enclosed by $x^2+y^2=1$ and $x^2+y^2=3$ with $x, y \geq 0$.

解

例題 2. (精選範例 16-1)

Calculate $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} x^2+y^2dydx$.

解

例題 3. (精選範例 16-2)

Calculate $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

解

例題 4. (精選範例 16-3)

Calculate $\iint_R e^{x-y}dA$, where $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$.

解

例題 5. (精選範例 16-4)

Calculate $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA$, where R is the trapezoidal with vertices $(1,0),(2,0),(0,-2)$ and $(0,-1)$.

解

重點十七 二重積分的應用

1. 利用體積求面積：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一個封閉有界區域

則 R 的面積 $A=$ ________________

說例

令 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le\lambda\}$，其中 λ 是一個定值

則 $\text{Area}(R)=\iint_R dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\lambda} r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda^2}{2}d\theta=\frac{\lambda^2}{2}\cdot 2\pi=\pi\lambda^2$

2. 二變數函數在一區域上的平均值：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一個面積有限的區域

則 $f(x,y)$ 在 R 上的平均值 $\text{avg}_R(f)=$ ____________________

說例

設 $f(x,y)=x$ 且 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

則 $\text{avg}_R(f)=\frac{1}{|R|}\iint_R dA=\frac{1}{\pi}\iint_R x\,dA=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(r\cos\theta)r\,dr\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\int_0^{1}r^2\,dr\,d\theta$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot(\frac{1}{3})d\theta=\frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{3\pi}\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}=0$

3. 力矩與質心：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^2$ 在每一點 (x,y) 上都有密度 (density) 函數 $f(x,y)$，則：

(1) R 的質量 $M=\iint_R f(x,y)\,dA$

(2) R 對 x 軸的一次矩 (first moment) $M_x=\iint_R y f(x,y)\,dA$

R 對 y 軸的一次矩 $M_y=$ ____________________

(3) R 的質心 (center of mass) $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{M_y}{M},\frac{M_x}{M})$

(4) 若 $f(x,y)=1$，則稱 R 的質心為形心 (centroid)

說例

設 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 的密度函數 $f(x,y)=x+2y$

$\Rightarrow$ $M_x=\iint_R y(x+2y)dA=\int_0^1\int_0^1 yx+2y^2dxdy=\int_0^1\frac{y}{2}+2y^2dy=\frac{11}{12}$

且 $M_y=\iint_R x(x+2y)dA=\int_0^1\int_0^1 x^2+2xydxdy=\int_0^1\frac{1}{3}+ydy=\frac{5}{6}$

而 $M=\iint_R x+2ydA=\int_0^1\int_0^1 x+2ydxdy=\int_0^1\frac{1}{2}+2ydy=\frac{3}{2}$

故 R 的質心 $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M})=(\frac{\frac{11}{12}}{\frac{3}{2}},\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}})=(\frac{11}{18},\frac{5}{9})$

例題 1. (精選範例 17-1)

Find the area of the region enclosed by $y=x$ and $y=x^2$ with $x\ge 0$ and $y\ge 0$.

解

例題 2. (精選範例 17-2)

Find the average of $f(x)=\int_x^1 \cos t^2 dt$ on $[0,1]$.

解

例題 3. (精選範例 17-3)

Find the mass and the center of mass of R, where R is the triangle of vertices $(0,0),(2,0)$ and $(0,1)$, and the density of R at (x,y) is $1+2x+3y$.

解

重點十八 三變數函數的積分：三重積分

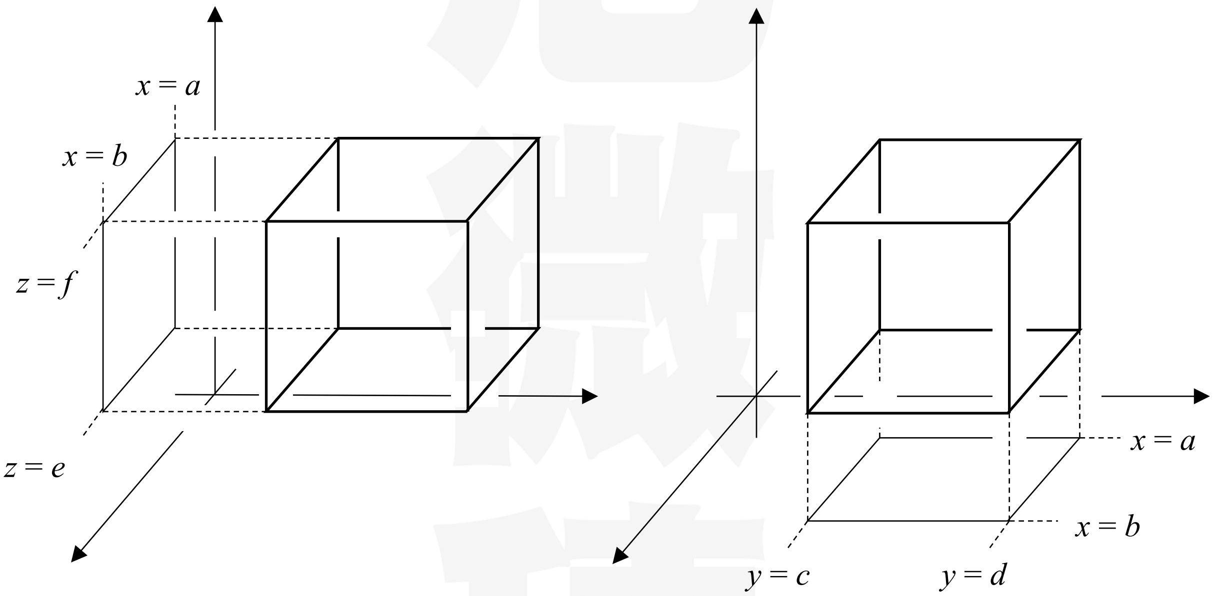
◎ **三重積分意義：**

(1) 想像一立體區域 R 中每一點都有一個值 (如溫度)，而這些定義在 R 上各點的值可用 $f(x,y,z)$ 表示，則 $\iiint_R f(x,y,z)dV$ 表將所有在 R 上的值累積起來的總量值

(2) 計算 $\iiint_R f(x,y,z)dV$ 時，

① 若為立體直角坐標系，則 $dV = dxdydz$

② 若 $f(x,y,z)$ 在 R 上連續，則積分次序可交換



(3) 如何決定積分次序？

① 給區域邊界型 $\Rightarrow$ 畫圖、固定一點畫射線、再固定一點畫射線、以射線不用分段討論為原則、從最後一條射線往外積

② 給變數範圍型 $\Rightarrow$ 範圍有其他變數的先積

例題 1.

Calculate $\iiint_R x+y+zdV$, where R is the region bounded by $x=0, y=0, z=0$ and $x+2y+3z=0$.

解

例題 2.　(精選範例 18-1)

Calculate $\iiint_R x\,dV$, where R is the region bounded by $x=0, z=0, z=1$ and $x^2+(y-1)^2=1$ with $x \ge 0$.

解

例題 3. (精選範例 18-2)

Calculate $\iiint_R y+zdV$, where $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sin y\le z\le x, 0\le y\le x, 0\le x\le\pi\}$.

解

重點十九 柱座標與球座標

1. 柱座標 (cylindrical coordinate)：

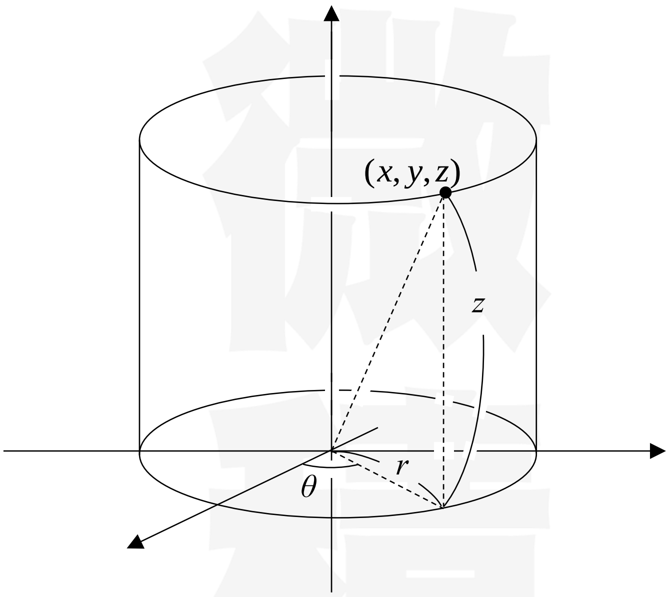
(1) 空間中除原點外任一點 (x,y,z) 均可以柱座標 (r,θ,z) 表示

(2) 如下圖所示，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

(3) 此變換的 Jacobian 如下所示：

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 承 (3)，$dxdydz = \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| drd\theta dz =$ ________________



2. 球座標 (spherical coordinate)：

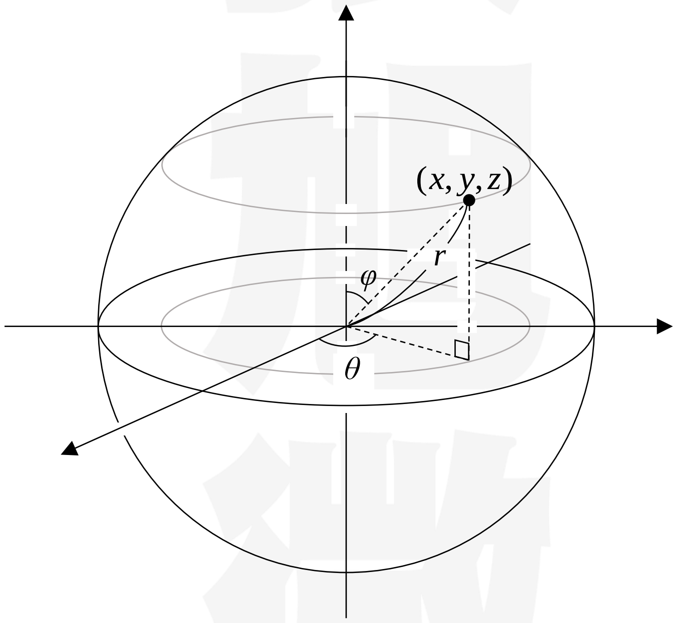
(1) 空間中除原點外任一點 (x,y,z) 均可以球座標 (r,θ,φ) 表示

(2) 如下圖所示，$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

(3) 此變換的 Jacobian 如下所示：

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(4) 承 (3)，$dxdydz=\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi=$ ____________________



例題 1.

(1) Express $(2, \frac{\pi}{3}, 1)$ (cylindrical coordinate) in rectangular coordinate.

(2) Express $(3, -3, 5)$ (rectangular coordinate) in cylindrical coordinate.

解

例題 2.

(1) Express $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (spherical coordinate) in rectangular coordinate.

(2) Express $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ (rectangular coordinate) in spherical coordinate.

解

例題 3. (精選範例 19-1)

Calculate $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydz$

解

例題 4. (精選範例 19-2)

Calculate $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2+z^2)dzdydz$

解

例題 5. (精選範例 19-3)

Calculate $\iiint_R z\sqrt{x^2+y^2}\,dV$, where R is the region bounded by $x^2+y^2=z^2$ and $z=2$.

解

例題 6.　(精選範例 19-4)

Calculate $\iiint_R x^2+y^2+z^2 dV$, where $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

解

重點二十 三重積分的應用

1. 利用三重積分求面積：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一個封閉有界區域

則 R 的面積 $V =$ ________________

2. 三變數函數在一區域上的平均值：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一個面積有限的區域

則 $f(x,y,z)$ 在 R 上的平均值 $\text{avg}_R(f) =$ ____________________

3. 力矩與質心：

設 $R \subseteq \mathbb{R}^3$ 在每一點 (x,y,z) 上都有密度 (density) 函數 $f(x,y,z)$，則：

(1) R 的質量 $M = \iiint_R f(x,y,z)dV$

(2) R 對 xy 平面的一次矩 $M_{xy} = \iiint_R zf(x,y,z)dV$

R 對 yz 平面的一次矩 $M_{yz} =$ ____________________

R 對 xz 平面的一次矩 $M_{xz} =$ ____________________

(3) R 的質心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (\frac{M_{yz}}{M},\frac{M_{xz}}{M},\frac{M_{xy}}{M})$

(4) 若 $f(x,y,z)=1$，則稱 R 的質心為形心

例題 1. (精選範例 20-1)

Find the centroid of the region bounded by $x=0, y=0, z=0$ and $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

解

例題 2. (精選範例 20-2)

Let $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le z\le 4\}$ and the density of R at (x,y,z) is $12z$, find the center of mass of R.

解

例題 3.　(精選範例 20-3)

Find the volume of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ with $a>0, b>0$ and $c>0$.

解